ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Service de la formation professionnelle SFP
Amt für Berufsbildung BBA

Ecole professionnelle commerciale
Kaufmännische Berufsfachschule

Derrière-les-Remparts 1a, 1700 Freiburg

T +41 26 30 525 26, F +41 26 305 25 49
www.kbsfreiburg.ch

—

Informationsblatt Mathematik BM 2 (post-EFZ)

Wir erwarten folgende Vorkenntnisse:

- **Rechenoperationen in der Menge der ganzen Zahlen (Z), sicheres Beherrschen der Grundrechenoperationen in Z, Termumformungen und -vereinfachungen**

  Bsp.: $2a-3b(a + 3b-z)-(4a + 8b)(2a-2b)-3bz = -8a^2+2a-11ab+7b^2$

- **Ausklammern von Faktoren**

  Bsp.: $(27a + 9a^2 - 6ab) = 3a(9 + 3a - 2b)$

- **Erkennen von Binomen, Summen in Produkte umformen**

  Bsp. :$(x+y)^2 = x^2 +2xy + y^2$ *oder* $16a^2 -49b^2 = (4a-7b)(4a + 7b)$

- **Rechenoperationen in der Menge der rationalen Zahlen Q; sicheres Beherrschen des Bruchrechnens**

  Bsp. :

  $$\frac{27}{32} : \frac{9}{10} = \frac{15}{16} \quad \text{oder} \quad \frac{24z}{19} - \frac{3}{5y} = \frac{120zy - 57}{95y}$$

- **Gleichungen; Lineare Gleichungen mit einer Variablen lösen können**

  Bsp: $14 + 4x = 28x-18$ *Lösung:* $x = \frac{4}{3}$

Theoretische Teile vgl. Anhang oder verschiedene Bücher:

- Vertiefungen vgl. Lerndossier im Anhang
- Rolf Männel: Algebra für Wirtschaftsschulen. Verlag Gehlen (weitere Buchtitel befinden sich im Theorie- und Lerndossier)

ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Ecole professionnelle artisanale et industrielle
Gewerbliche und Industrielle Berufsfachschule

Derrière-les-Remparts 5, 1700 Fribourg

Mathematik

Vorbereitung BM

Liebe Schüler

Ein Grossteil des Mathematikstoffs der Sekundarstufe I wird im Verlaufe der Berufsmatura wiederholt und vertieft. Erfahrungsgemäss bereitet aber der Übergang OS $\rightarrow$ BM, vor allem in der Mathematik, Schwierigkeiten. Wir empfehlen Ihnen deshalb dringend, diese Unterlagen vor Kursbeginn durchzuarbeiten.

Wir wünschen Ihnen einen guten Start

Was sie unbedingt können sollten

Bruchrechnen: *Erweitern und kürzen von Brüchen; Addieren/Multiplizieren von Brüchen; Hauptnenner bestimmen; Gleichnennrig machen*

Faktorisieren: *Klammern setzen und Klammern auflösen (Vorzeichenregel)*

Binomische Formeln: *die drei Binomischen Formeln*

Potenzgesetze: *ohne Wurzeln*

Lineare Gleichungen: *Schrittweises!! auflösen einfacher Gleichungen*

Winkel im Dreieck: *Winkelsumme*

Strahlensätze/Ähnlichkeit: *Seitenverhältnisse ähnlicher Körper*

Pythagoras:

Quellen:

Die nachfolgenden Unterlagen sind ein Zusammenschnitt aus folgenden Internetseiten:

http://www.bos-n.de/home
http://projekte.gymnasium-odenthal.de
http://www.gymmuenchenstein.ch/weiss/offene_Lehrmittel/Mathematik

Eine Fülle weiterer Übungen finden Sie im Internet (google + Stichwort)

Schauen Sie sich auch die alten Aufnahmeprüfung auf unserer homepage an!

Grundwissen Mathematik

Algebra

Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen:	$\mathbb{N} = \{1;2;3;4;\ldots\}$
Menge der ganzen Zahlen:	$\mathbb{Z} = \{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$
Menge der rationalen Zahlen:	$\mathbb{Q} = \{\ldots;-1{,}5;\ldots;-1;\ldots;-\frac{1}{3};\ldots;0;\ldots;\frac{1}{4};\ldots;1;\ldots\}$
Menge der reellen Zahlen:	$\mathbb{R} = \{\ldots;-3\sqrt{2};\ldots;-\sqrt{3};\ldots;-1;\ldots;0;\ldots;\frac{1}{2};\ldots;1;\ldots;\sqrt{5};\ldots\}$

Beispiele für Schreibweisen:

$\mathbb{N}_0 = \{0;1;2;3;\ldots\}$; $\mathbb{Z}^- = \{\ldots;-3;-2;-1\}$; $\mathbb{Z}_0^- = \{\ldots;-3;-2;-1;0\}$

$\mathbb{Q}_0^+ = \{0;\ldots;\frac{1}{3};\ldots;\frac{2}{3};\ldots;1;\ldots;1{,}75;\ldots\}$ etc.

Grundrechenarten

Addition

2	+	1	=	3
1. Summand	*plus*	*2. Summand*		**Summe**

Subtraktion

2	–	3	=	−1
Minuend	*minus*	*Subtrahend*		**Differenz**

Multiplikation

5	·	8	=	40
1.Faktor	*mal*	*2.Faktor*		**Produkt**

Division

21	:	7	=	3
Dividend	*geteilt durch*	*Divisor*		**Quotient**

Brüche und Dezimalzahlen

Jede rationale Zahl (also aus $\mathbb{Q}$) kann durch einen Bruch bzw. eine Dezimalzahl dargestellt werden.

Beispiele:

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$; Aber: $\frac{4}{\mathbf{9}} = 0{,}444444\ldots = 0{,}\overline{4}$

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = 0{,}66666\ldots = 0{,}\overline{6}$ (lies: *Null Komma Periode Sechs*)

Bezeichnung: $\frac{2}{5}$ $\frac{\textit{Zähler}}{\textit{Nenner}}$

Ist bei einem Bruch der Zähler **kleiner** als der Nenner, so spricht man von einem *echten Bruch.*	$\frac{2}{5}$
Ist der Zähler **größer** als der Nenner, so nennt man ihn einen *unechten Bruch.*	$\frac{9}{2}$
Unechte Brüche können als Summe aus einer natürlichen Zahl und einem echten Bruch dargestellt werden, wobei die Summe ohne Additionszeichen ‚+' geschrieben wird.	$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$
Man bezeichnet diese Darstellung als *gemischte Zahl* oder auch als *gemischten Bruch.*	$\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

Erweitern und Kürzen von Brüchen

Die Darstellung einer rationalen Zahl durch einen Bruch ist nicht eindeutig.

Beispiel: $\frac{1}{25} = \frac{2}{50} = \frac{4}{100} = 0{,}04$ (vier Hundertstel)

Ein Bruch wird *erweitert*, indem man Zähler <u>und</u> Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert.

Beispiel: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$ (Erweitern mit 5)

Ein Bruch wird *gekürzt*, indem man Zähler <u>und</u> Nenner durch die gleiche Zahl (ohne Rest) dividiert.
Ist kein weiteres Kürzen ohne Rest möglich, so ist der Bruch *vollständig gekürzt.*

Beispiel: $\frac{12}{48} = \frac{\cancel{12}^{\,1}}{\cancel{48}_{\,4}} = \frac{1}{4}$ (Kürzen mit der Zahl 12, vollständig gekürzter Bruch)

Umwandlung Bruch $\rightleftharpoons$ Dezimalzahl

Bruch $\rightharpoonup$ Dezimalzahl

- ▷ $\frac{7}{10} = 0{,}7$ (sieben Zehntel)
- ▷ $\frac{7}{9} = 0{,}77777\ldots = 0{,}\overline{7}$ (lies: *Null Komma Periode Sieben*)
- ▷ $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ Erst erweitern auf eine Stufenzahl (10).
- ▷ $\frac{5}{6} = 5 : 6$ Ausführen der Division, da keine Stufenzahl erreichbar.

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{l} \underline{5:6} = 0{,}833\ldots \\ 50 \\ \underline{-48} \\ \quad 20 \\ \quad \underline{-18} \\ \qquad 20 \\ \qquad \vdots \end{array}$$

$\frac{5}{6} = \underline{\underline{0{,}8\overline{3}}}$ (lies: *Null Komma Acht Periode Drei*)

Bruch $\leftharpoondown$ Dezimalzahl

- ▷ $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- ▷ $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$
- ▷ $0{,}\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
- ▷ $0{,}\overline{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

Bemerkung: Arbeiten Sie bei Brüchen mit dem Bruchstrich, nicht mit dem Doppelpunkt!

$\frac{a^2}{b}$ statt $a^2 \div b$

Rechnen mit Brüchen

Multiplikation

Brüche werden multipliziert, indem man die Zähler und die Nenner jeweils miteinander multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

▷ $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{9}{20}}}$

▷ $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\cancel{3}^{1}}{8} \cdot \frac{5}{\cancel{6}_{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{16}}}$ Kürzen, sobald möglich!

▷ $2 \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = \underline{\underline{2\frac{2}{3}}}$ Unechten Bruch in gemischte Zahl umwandeln.

Division

Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

▷ $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

▷ $1\frac{1}{3} : \frac{1}{3} = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{1} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{1} = \underline{\underline{4}}$

▷ $-\frac{5}{17} : (-5) = \frac{\cancel{-5}}{17} \cdot \frac{1}{\cancel{-5}} = \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{17}}}$

Addition und Subtraktion

Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie durch Erweitern *gleichnamig* macht und die so erhaltenen Zähler addiert bzw. subtrahiert, wobei der gemeinsame Nenner beibehalten wird.

▷ $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9+2}{12} = \underline{\underline{\frac{11}{12}}}$

▷ $3\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} = \frac{13}{4} - \frac{3}{2} = \frac{13}{4} - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{13}{4} - \frac{6}{4} = \frac{13-6}{4} = \frac{7}{4} = \underline{\underline{1\frac{3}{4}}}$

Bruchrechnen mit dem Taschenrechner [1]

Wichtige Taste: $\boxed{a^b/_c}$

Beispiel: $1\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$; Eingabe: 1 $\boxed{a^b/_c}$ 1 $\boxed{a^b/_c}$ 3 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{a^b/_c}$ 3 $\boxed{=}$ 2⌟3

Zwischentest

Lösen Sie die Aufgaben zu den bisher behandelten Inhalten und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Lösung.

1. Erweitern Sie die Brüche, so dass der Nenner eine Stufenzahl (10, 100, ...) ist und geben Sie den Wert des Bruchs als Dezimalzahl an.

   a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $2\frac{1}{16}$

2. Kürzen Sie folgende Brüche *vollständig*!

   a) $\frac{22}{198}$ b) $\frac{13}{169}$ c) $1\frac{30}{66}$

3. Wandeln Sie jeweils in eine Dezimalzahl bzw. einen Bruch um.

   a) $\frac{55}{352}$ b) $\frac{414}{180}$ c) 0,4375 d) $3,\overline{28}$

4. Berechnen Sie und geben Sie das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an!

   a) $3\cdot\frac{2}{13}$ b) $-\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{8}$ c) $1\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{6}{11}\right)$ d) $\frac{-18}{9}\cdot\frac{17}{-36}$

   e) $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ g) $-\frac{7}{12}-\frac{13}{24}$ h) $\frac{9}{6}-\frac{18}{36}$

   i) $-2:\frac{5}{17}$ j) $2\frac{1}{7}:2\frac{1}{7}$ k) $\left(-\frac{2}{9}\right):\left(-\frac{19}{27}\right)$ l) $\frac{2}{5}:\left(-\frac{4}{20}\right)$

5. Bestimmen Sie die Zahl, die auf dem Zahlenstrahl in der Mitte zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{5}$ liegt.

6. Berechnen Sie: a) $\dfrac{\frac{2}{3}-4}{\frac{5}{7}}$ b) $\left(3\cdot\frac{4}{6}-4\cdot\frac{1}{3}\right):\frac{2}{3}$

Lösungen

1(a) 1,2 1(b) 0,375 1(c) 2,0625

2(a) $\frac{1}{9}$ 2(b) $\frac{1}{13}$ 2(c) $1\frac{5}{11}=\frac{16}{11}$

3(a) 0,15625 3(b) 2,3 3(c) $\frac{4375}{10000}=\frac{7}{16}$ 3(d) $3\frac{28}{99}$

4(a) $\frac{6}{13}$ 4(b) $-\frac{1}{4}$ 4(c) $-\frac{7}{11}$ 4(d) $\frac{17}{18}$

4(e) $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ 4(f) $\frac{5}{12}$ 4(g) $-\frac{9}{8}=-1\frac{1}{8}$ 4(h) 1

4(i) $-\frac{34}{5}=-6\frac{4}{5}$ 4(j) 1 4(k) $\frac{6}{19}$ 4(l) -2

(5) $\frac{7}{15}$

6 (a) $-4\frac{2}{3}$ 6(b) 1

Empfehlung: *Haben Sie in diesem Zwischentest* **mehr als vier Fehler**, *so arbeiten Sie das entsprechende bzw. die entsprechenden Kapitel nochmals durch.*

Terme und Rechengesetze

Ein *Term* besteht aus Zahlen und Variablen (Buchstaben), die durch die Rechenzeichen $+, -, \cdot$ oder $:$ verknüpft sind.
Für die Variablen können beliebige Zahlen, aber auch andere Terme eingesetzt werden.

Beispiele:

- $\underbrace{a}_{\text{Variable}} + \underbrace{a}_{\text{Variable}} + \underbrace{a}_{\text{Variable}}$ oder kurz: $\underbrace{3}_{\text{Koeffizient}} \cdot \underbrace{a}_{\text{Variable}}$

  Häufig schreibt man einfach $3a$ statt $3 \cdot a$, also ohne Multiplikationspunkt zwischen dem Koeffizienten und der Variable.
- $2x - 13y + \frac{1}{12}z$
- $a^2 - 2ab + b^2$
- $\frac{G}{H^2}$: BMI (Body Mass Index), wobei G: Körpergewicht in kg und H: Größe in m.

Gleichartige Terme: Terme, die sich nur in ihren Koeffizienten unterscheiden heißen *gleichartig*.

a , $5a$, $\frac{2}{3}a$ oder $3ab$, $8ab$ oder a^3b , $5a^3b$ gleichartige Terme
a ; ab ; a^2b ; a^2b^2 ; a^3b ; ab^2 ungleichartige Terme

Zusammenfassen von Termen: Es dürfen nur *gleichartige* Terme zusammengefasst werden.

Beispiel: $\underline{3a} - \underline{12a} - \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{3b}} = \mathbf{-9a + b}$

Gleichartige Terme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Koeffizienten (Beizahlen) addiert bzw. subtrahiert.

Termarten

Man unterscheidet je nach zuletzt auszuführender Rechenoperation die Termart, wobei die Regel **„Klammer vor Punkt vor Strich"** zu beachten ist.

Summe:	$\frac{a}{2} + 3b$
Differenz:	$3a - \frac{b}{6}$
Produkt:	$(a+b) \cdot (a-b)$
Quotient:	$\frac{3a+2b}{6}$

Rechenzeichen in Termen müssen durch eine *Klammer* voneinander getrennt sein.

Falsch: $\cancel{3 \cdot -2}$; Richtig: $3 \cdot (-2)$
Falsch: $\cancel{3 + -5}$; Richtig: $3 + (-5)$ bzw. $3 - 5$

Rechengesetze

- **Assoziativgesetz**

  der Addition:

  $\boxed{(a+b)+c=a+(b+c)}$; $a,b,c\in\mathbb{Q}$

  der Multiplikation:

  $\boxed{(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)}$; $a,b,c\in\mathbb{Q}$

  Beispiel:

  $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+1=\left(1\frac{1}{4}\right)+1=2\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}+\left(1\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{4}$ ✓

- **Kommutativgesetz**

  der Addition:

  $\boxed{a+b=b+a}$; $a,b\in\mathbb{Q}$

  der Multiplikation:

  $\boxed{a\cdot b=b\cdot a}$; $a,b\in\mathbb{Q}$

  Beispiel:

  $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ ✓

Das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz gilt i. A. <u>nicht</u> für die Subtraktion bzw. die Division!

Beispiele:

K-Gesetz: $\underbrace{5-2}_{3}\neq\underbrace{2-5}_{-3}$

A-Gesetz: $\underbrace{(5-2)-1}_{2}\neq\underbrace{5-(2-1)}_{4}$

So geht's *richtig*:

K-Gesetz: $5-2=5+(-2)=-2+5$

A-Gesetz: $(5-2)-1=(5+(-2))+(-1)=$
$=5+(-2+(-1))=5+(-3)=2$ ✓

Die Subtraktion lässt sich auf die Addition der Gegenzahl zurückführen.
Vertauschen von Termen nur unter Mitnahme des Vorzeichens!

- **Distributivgesetz:** Verbinden von Multiplikation und Addition;

  $\boxed{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$; $a,b,c\in\mathbb{Q}$

  $\xrightarrow{\text{Ausmultiplizieren}}$
  $\xleftarrow{\text{Ausklammern}}$

Andere Formen des Distributivgesetzes:

$a\cdot(b-c)=ab-ac$	$(a-b)\cdot c=ac-bc$
$(a+b):c=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$	$(a-b):c=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$

Bitte beachten:

$$c:(a+b)=\frac{c}{a+b}\quad\neq\quad\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{ac+ac}{ab}$$

Multiplikation von Summen

Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden des zweiten Faktors mit jedem Summanden des ersten Faktors multipliziert.

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$$

Beispiele:

- $(2a+3b)\cdot(x-4y) = 2ax-8ay+3bx-12by$
- $(2-3a-4b)\cdot(2a-3b) = 4a-6b-6a^2+9ab-8ab+12b^2 = 4a-6b-6a^2+ab+12b^2$

Die drei binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$

Beispiele:

- $(2a-3b)^2 = (2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2 = 4a^2-12ab+9b^2$
- $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2-(3b)^2 = 4a^2-9b^2$
- $(5x+4y)^2 = (5x)^2+2\cdot 5x\cdot 4y+(4y)^2 = 25x^2+40xy+16y^2$

Faktorisieren von Summen

Manche Summen bzw. Differenzen lassen sich durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren oder durch Anwenden der binomischen Formeln in ein Produkt verwandeln – diesen Vorgang nennt man *Faktorisieren.*

- $\underbrace{2a+3ab}_{\text{Summe}} = \underbrace{\overbrace{a}^{\text{1.Faktor}}\cdot\overbrace{(2+3b)}^{\text{2.Faktor}}}_{\text{Produkt}}$
- $-2ab^2-6a^2b = -2ab\cdot(b+3a)$
- $6ax+3ay-2bx-by = 3a(2x+y)-b(2x+y) = (3a-b)(2x+y)$
- $4a^2-12ab+9b^2 \overset{\text{Bin.F.}}{=} (2a-3b)^2$
- $4a^2-9b^2 \overset{\text{Bin.F.}}{=} (2a-3b)(2a+3b)$
- $4a^2+9b^2$ Keine Faktorisierung möglich!

Zwischentest

Lösen Sie die Aufgaben zu den bisher behandelten Inhalten und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Lösung.

1. Fassen Sie gleichartige Terme zusammen.
   a) $7a+2b+3a-10b$ b) $6x-3y+5x-9y-8x+4y$ c) $5\frac{1}{4}a-3\frac{1}{2}b+7c-3\frac{1}{2}a+6b-8\frac{1}{2}c$
   d) $9{,}36a+8\frac{2}{3}b+1{,}14a-2\frac{1}{3}b$

2. Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen!
   a) $x+5(y-x)$ b) $4a(3b-5c)$ c) $m-[(b+c)-(m+d)]$
   d) $-2u\cdot(u-v)+2u\cdot(u-v)$ e) $-2(7k-3m)-4\cdot\{-4\cdot[-4(k+m)]-(k+m)\}$

3. Multiplizieren Sie aus!
   a) $(m-n)\cdot(x-y)$ b) $(a+b+c)\cdot(d+e)$ c) $(a-b-c)\cdot(-d-e)$
   d) $(0{,}3y-2)\cdot(4{,}8y-1{,}5)$

4. Verwandeln Sie in ein Produkt!
   a) $ab+ac$ b) $21st-28tu$ c) $12bc+120ab+36bd$
   d) $2(x-3)+y(x-3)$ e) $n(x-y)-(x-y)$ f) $(3a+2b)(m+n)+(2a-3b)(m+n)-(m+n)$

5. Schreiben Sie als Ausdruck ohne Klammer!
   a) $(2z+\frac{1}{3})^2$ b) $(\frac{2}{3}a+\frac{2}{b})^2$ c) $(0{,}4x+x^2+1)^2$ d) $(x+\frac{2}{x})^2$
   e) $(-1-x)^2$ f) $(5a^2-a)^2$ g) $(y-2)^3$ h) $(x-\frac{2}{x})^2$
   i) $(2x-y)(2x+y)$ j) $(1\frac{1}{3}-3a)(1\frac{1}{3}+3a)$ k) $(a+b+c)(a+b-c)$ l) $(-a+b)(a+b)$

6. Faktorisieren Sie soweit wie möglich!
   a) $c^2-2cd+d^2$ b) $8x^2-8x+2$ c) $16a^2+48ab+36b^2$ d) $0{,}49bc^2-81bd^2$ e) $a^2+2ab+b^2-c^2$

7. Verwandeln Sie in einen Ausdruck ohne Klammer: $(2a-\frac{1}{2})^2$

Lösungen

1. a) $10a-8b$ b) $3x-8y$ c) $1\frac{3}{4}a+2\frac{1}{2}b-1\frac{1}{2}c$ d) $10{,}5a+6\frac{1}{3}b$

2. a) $-4x+5y$ b) $12ab-20ac$ c) $2m-b-c+d$ d) 0 e) $-74k-54m$

3. a) $mx-my-nx+ny$ b) $ad+ae+bd+be+cd+ce$ c) $-ad-ae+bd+be+cd+ce$
   d) $1{,}44y^2-10{,}05y+3$

4. a) $a(b+c)$ b) $7t\,(3s-4u)$ c) $12b(c+10a+3d)$ d) $(2+y)(x-3)$ e) $(n-1)(x-y)$
   f) $(5a-b-1)(m+n)$

5. a) $4z^2+1\frac{1}{3}z+\frac{1}{9}$ b) $\frac{4}{9}a^2+2\frac{2}{3}\,\frac{a}{b}+\frac{4}{b^2}$ c) $x^4+0{,}8x^3+2{,}16x^2+0{,}8x+1$
   d) $x^2+4+\frac{4}{x^2}$ e) $1+2x+x^2$ f) $25a^4-10a^3+a^2$ g) $y^3-6y^2+12y-8$ h) $x^2-4+\frac{4}{x^2}$
   i) $4x^2-y^2$ j) $1\frac{7}{9}-9a^2$ k) $a^2+2ab+b^2-c^2$ l) b^2-a^2

6. a) $(c-d)^2$ b) $2(2x-1)^2$ c) $(4a+6b)^2$ d) $b(0{,}7c+9d)(0{,}7c-9d)$
   e) $(a+b+c)(a+b-c)$

7. $4a^2-2a+\frac{1}{4}$

Bruchterme

Tritt im Nenner eines Terms (also unten) eine Variable auf, so spricht man von einem *Bruchterm*.

Kürzen von Bruchtermen	Zähler und Nenner müssen als Produkt vorliegen. Es dürfen nur gleiche Faktoren gekürzt werden!

Beispiele:

▷ $\dfrac{24a^2b^3}{16a^3b} = \dfrac{{}^3\cancel{24}a^2b^3}{{}_2\cancel{16}a^3b} = \dfrac{3\cancel{a^2}b^3}{2a^{\cancel{3}}b} = \dfrac{3b^{\cancel{3}2}}{2a\cancel{b}} = \underline{\underline{\dfrac{3b^2}{2a}}}$

Zähler u. Nenner liegen als Produkt vor. Daher keine Faktorisierung notwendig. Rechnung relativ ausführlich zum besseren Verständnis.

▷ $\dfrac{2a\cdot(a+3b)}{6a^2\cdot(a+2b)} = \dfrac{\cancel{2}\cancel{a}\cdot(a+3b)}{{}_3\cancel{6}a^{\cancel{2}}\cdot(a+2b)} = \underline{\underline{\dfrac{a+3b}{3a\cdot(a+2b)}}}$

Zähler u. Nenner liegen als Produkt vor. Kürzen ist sofort möglich. Summe im Ergebnis darf <u>nicht</u> gekürzt werden, obwohl sich $a+3b$ und $a+2b$ sehr ähnlich sind!

▷ $\dfrac{4a^2+2ab}{8a^3+4a^2b} = \dfrac{2a\cdot(2a+b)}{4a^2\cdot(2a+b)} = \dfrac{\cancel{2}\cancel{a}\cdot\cancel{(2a+b)}}{{}_2\cancel{4}a^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(2a+b)}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2a}}}$

Zähler u. Nenner sind jeweils Summen. Soviel wie möglich ausklammern. Zähler und Nenner sind Produkte. Jetzt Kürzen.
$(2a+b)$ ist zwar eine Summe, aber gleichzeitig auch als Faktor in Zähler u. Nenner vorhanden und darf deshalb als Ganzes gekürzt werden.

▷ $\dfrac{18a^2-8b^2}{9a^2-12ab+4b^2} = \dfrac{2\cdot(9a^2-4b^2)}{(3a-2b)^2} =$
$= \dfrac{2\cdot\cancel{(3a-2b)}(3a+2b)}{(3a-2b)^{\cancel{2}}} = \underline{\underline{\dfrac{2\cdot(3a+2b)}{3a-2b}}}$

Zähler u. Nenner sind (noch) keine Produkte. 2 im Zähler ausklammern. Binomische Formeln zur Faktorisierung anwenden. Kürzen.

Multiplikation von Bruchtermen

Bruchterme werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Division von Bruchtermen

Bruchterme werden dividiert, indem man den ersten Bruchterm mit dem Kehrbruch (Zähler und Nenner vertauschen) des zweiten Bruchterms *multipliziert.*

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Dies gilt insbesondere auch für Doppelbrüche: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$

Beispiele:

▷ $\dfrac{16x^2}{9y^3}:\dfrac{8x^3}{3y} = \dfrac{{}^2\cancel{16}x^2}{9y^3}\cdot\dfrac{3y}{\cancel{8}x^3} = \dfrac{2x^2\cdot\cancel{3}y}{{}_3\cancel{9}y^3\cdot x^3} = \dfrac{2\cancel{x^2}y}{3x^{\cancel{3}}y^{\cancel{3}2}} = \underline{\underline{\dfrac{2}{3xy^2}}}$

▷ $\dfrac{16-a^2}{8-2a}\cdot\dfrac{16+4a}{16+8a+a^2} = \dfrac{(4-a)(4+a)}{2(4-a)}\cdot\dfrac{4(4+a)}{(4+a)^2} = \dfrac{{}^2\cancel{4}\cancel{(4-a)}\cancel{(4+a)^2}}{\cancel{2}\cancel{(4-a)}\cancel{(4+a)^2}} = \underline{\underline{2}}$

Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Bruchterme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man alle Bruchterme auf den kleinsten gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) erweitert und die so entstandenen Zähler addiert bzw. subtrahiert. Der Hauptnenner wird dabei beibehalten.

Beispiele:

▷ $$\frac{3a}{10x^2} + \frac{7b}{15x^3} = \frac{3a \cdot 3x}{10x^2 \cdot 3x} + \frac{7b \cdot 2}{15x^3 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{9ax + 14b}{30x^3}}}$$

Der Hauptnenner ist $30x^3$. Denn es gilt $10x^2 = 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x$ und $15x^3 = 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x$. Alle in den Nennern auftretenden Faktoren müssen als Teiler im Hauptnenner enthalten sein. Somit 2, 3, 5 und x^3, also $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^3 = 30x^3$. Die Erweiterungsfaktoren sind die auf den Hauptnenner ‚fehlenden' Faktoren der einzelnen Nenner. Als Tabelle:

Nenner	Faktoren						Erweiterung
$10x^2 =$	2		$\cdot 5$		$\cdot x$	$\cdot x$	$3x$
$15x^3 =$		3	$\cdot 5$	$\cdot x$	$\cdot x$	$\cdot x$	2
Hauptnenner:	2	$\cdot 3$	$\cdot 5$	$\cdot x$	$\cdot x$	$\cdot x$	$\mathbf{30x^3}$

▷ $$\frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{(x^2+1)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} - \frac{(2x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$\frac{x^3-x^2+x-1-(2x^2+2x-x-1)}{(x-1)^2(x+1)} = \underline{\underline{\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^2(x+1)}}}$$

Die Nenner werden mit Hilfe der binomischen Formeln faktorisiert, d.h. in ein Produkt verwandelt. Es gibt zwei verschiedene Faktoren: $(x-1)$ und $(x+1)$. Der Faktor $(x-1)$ kommt doppelt vor, also $(x-1)^2$. Somit muss auch im Hauptnenner $(x-1)^2$ vorkommen. Damit ist der Hauptnenner: $(x-1)^2 \cdot (x+1)$. Als Tabelle:

Nenner	Faktoren			Erweiterung
$x^2-1 =$	$(x+1)$	$\cdot(x-1)$		$(x-1)$
$x^2-2x+1 =$		$(x-1)$	$\cdot(x-1)$	$(x+1)$
Hauptnenner	$(x+1)$	$\cdot(x-1)$	$\cdot(x-1)$	$(x+1)\cdot(x-1)^2$

Zwischentest

Lösen Sie die Aufgaben zu den bisher behandelten Inhalten und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Lösung.

1. Addieren Sie $\frac{1}{x} + \frac{x}{2}$

2. Vereinfachen Sie die Terme soweit wie möglich.

   (a) $\frac{-27ab}{3a}$

   (b) $\frac{3a^2 - 3b^2}{6a + 6b}$

   (c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1+x}{x^2-1}$, wobei $x \neq \pm 1$

   (d) $\frac{(a+2b)^2 - 8ab}{a - 2b}$, wobei $a \neq 2b$

   (e) $\frac{2x-3}{2x+3} - \frac{2x+3}{2x-3} + \frac{36}{4x^2-9}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}5; 1{,}5\}$

   (f) $\frac{(3a-3b)^2}{(a-b)^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq b$

   (g) $\frac{119ab^2c}{143bc^3} \cdot \left(\frac{26ab^2c}{21b^4} : \frac{68a^2}{33bc^2} \right)$

LÖSUNGEN

1. $\frac{2+x^2}{2x}$

2. (a) $-9b$

   (b) $\frac{a-b}{2}$

   (c) 0

   (d) $a-2b$

   (e) $\frac{-12}{2x+3}$

   (f) 9

   (g) $\frac{c}{2}$

Potenzgesetze

Beispiel für Potenz: $x \cdot x = x^2$, wobei x: *Basis* und ^{2}: *Exponent*.

Potenzen: $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^2 = a \cdot a$; ... ; $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n−mal}}$; $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}$

Beispiele:

▷ $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$ ▷ $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$ ▷ $(-1)^{1057} = -1$ ▷ $(-1)^{1058} = 1$

Negative Exponenten: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$; $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$

▷ $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$ ▷ $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ ▷ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

1. Potenzgesetz:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a \in \mathbb{Q}$; $m, n \in \mathbb{Z}$

„Potenzen mit *gleicher Basis* werden multipliziert, indem man die Exponenten bei gleicher Basis addiert."

▷ $3^5 \cdot 3^4 = 3^{5+4} = 3^9$ ▷ $(-1{,}5)^2 \cdot (-1{,}5)^3 = (-1{,}5)^5 = -7{,}59379$ ▷ $5^4 \cdot 5^{-1} = 5^3$

2. Potenzgesetz:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $a, b \in \mathbb{Q}$; $n \in \mathbb{Z}$

„Produkte werden potenziert, indem man die einzelnen Faktoren potenziert."

▷ $(2 \cdot 3)^3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \overset{\text{A−Gesetz}}{=} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^3 = 216 = (6)^3$
▷ $(4 \cdot 5)^4 = 4^4 \cdot 5^4 = 160000$ ▷ $(-4b)^2 = 16b^2$

3. Potenzgesetz:

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $a \in \mathbb{Q}$; $m, n \in \mathbb{N}$

„Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert."

▷ $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^6 \cdot 2^6 = 2^{12} = 2^{3 \cdot 4} = 4096$

4. Potenzgesetz:

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $m, n \in \mathbb{Z}$

„Potenzen *gleicher Basis* werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert."

▷ $6^7 : 6^6 = 6^{7-6} = 6^1 = 6$ ▷ $4^{16} : 4^{16} = 4^0 = 1$ ▷ $5^{12} : 5^{14} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

5. Potenzgesetz:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad ; \quad a,b \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}\,;\, n \in \mathbb{Z}$$

„Brüche werden potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert."

▷ $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$ ▷ $\left(\frac{-2}{5}\right)^5 = \frac{-32}{3125}$ ▷ $\left(\frac{3}{-7}\right)^2 = \frac{9}{49}$

Rechnen mit Wurzeln

Irrationale Zahlen

Eine irrationale Zahl ist eine unendlich **nicht-periodische** Dezimalzahl.
Somit ist keine irrationale Zahl durch einen Bruch darstellbar!

Beispiele für irrationale Zahlen:

		exakter Wert	ungefähr gleich	Näherungswert
Kreiszahl	π ,	π	$\approx$	3,141592654
Eulersche Zahl	e ,	e	$\approx$	2,718281828
Wurzel	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$	$\approx$	1,414213562

Wurzel in Potenzschreibweise: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ …

Die fünf Potenzgesetze gelten auch für reelle Exponenten!

▷ $(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}} = x^2$ ▷ $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$

Rechengesetze

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad ; \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Bei der Addition und Subtraktion dürfen nur Wurzeln mit gleichem Radikand zusammengefasst werden.

Beispiele:

▷ $2\sqrt{2}+3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ ▷ $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{35}$ ▷ $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

▷ $\sqrt{28}-\sqrt{7} = \sqrt{4\cdot 7}-\sqrt{7} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{7} = 2\sqrt{7}-\sqrt{7} = \sqrt{7}$

Im letzten Beispiel hat man die Wurzeln „gleichgemacht", indem man eine Quadratzahl (hier: 4) abgespalten hat und daraus die Wurzel gezogen hat. Diese Vorgehensweise heißt „*teilweise Radizieren*".

Beispiele zum teilweisen Radizieren:

▷ $\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ▷ $\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\sqrt{2}$

▷ $6\sqrt{27}-2\sqrt{75}+9\sqrt{12}-5\sqrt{48}+4\sqrt{147}-5\sqrt{108} = 18\sqrt{3}-10\sqrt{3}+18\sqrt{3}-20\sqrt{3}+28\sqrt{3}-30\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Zwischentest

Lösen Sie die Aufgaben zu den bisher behandelten Inhalten und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Lösung.

1. Vereinfachen Sie den Term: $\dfrac{x^{2n+1}}{x^{1-n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:
   (a) $(-32x^2yz^3) : (-16xyz^2)$
   (b) $\left(\dfrac{6a^2b^3}{10x^2y^3}\right)^3 : \left(\dfrac{3ab^2}{5x^2y^2}\right)^3$
3. Berechnen Sie: $(5\sqrt{12} - 7\sqrt{27} + 3\sqrt{48})^2$
4. Vereinfachen Sie:
   (a) $\sqrt{5^2 - 4^2} \cdot (3a^2)^{-0,5}$
   (b) $\sqrt{\dfrac{5x}{6}} : \sqrt{\dfrac{20}{6x}}$
   (c) $\sqrt{720} + \sqrt{847} - \sqrt{252} - \sqrt{245} + \sqrt{1225}$
   (d) $\left(\dfrac{ab^{-\frac{2}{3}}}{b^{-1}}\right)^3 : \dfrac{b}{a^{-2}}$

Lösungen

1. x^{3n}
2. (a) $2xz$
   (b) $\dfrac{b^3}{y^3}$
3. 3
4. (a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}a}$ bzw. $\dfrac{\sqrt{3}}{a}$
   (b) $\dfrac{x}{2}$
   (c) $35 + 5\sqrt{5} + 5\sqrt{7}$
   (d) a

Gleichungen

Verbindet man zwei Terme durch **ein** Gleichheitszeichen $=$, so hat man eine *Gleichung*.

Äquivalenzumformungen
sind Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung unverändert lassen (von lat. *aequus* „gleich“ und *valere* „wert sein“). Solche Umformungen sind:

- ▷ Addition oder Subtraktion einer Zahl oder eines Terms.
  $2x+5=x-4\,/\,-x-5 \quad ; \quad x=-9 \quad ; \quad L=\{-9\}$
  Der Sinn solcher Umformungen ist es, die Lösung direkt ablesen zu können ($x=-9$). Die Zahl -9 ist auch die Lösung von $x-4=2x+5$, nur sieht man dies nicht sofort. Daher stellt man die Gleichung nach x um, wobei der Wert der Lösung gleich, also äquivalent, bleiben muss.

- ▷ Multiplikation mit einer Zahl ungleich Null
  $\frac{1}{2}x=2\,/\cdot 2 \quad ; \quad x=4 \quad ; \quad L=\{4\}$
  Warum darf die Zahl, mit der man muliplizert nicht Null sein!?
  Für die Gleichung $x=x+1$ gibt es keine Lösung, da keine Zahl gleich sie selbst plus Eins ist. Multipliziert man die Gleichung mit Null ($x=x+1\,/\cdot 0$), so erhält man $0=0$ bzw. $0\cdot x=0\cdot(x+1)$, was eine wahre Aussage ist und für alle Zahlen richtig ist. Damit kann die Multiplikation mit null keine Äquivalenzumformung sein, da die Lösungsmenge verändert wurde.

- ▷ Division durch eine Zahl ungleich Null
  $4x=12\,/:4 \quad ; \quad x=3 \quad ; \quad L=\{3\}$

Lineare Gleichungen

Beispiel: $3x-4=-4(x+3) \quad ; \quad 3x-4=-4x-12\,/+4x+4 \quad ; \quad 7x=-8\,/:7 \quad ; \quad x=-\frac{8}{7} \quad ; \quad L=\{-1\tfrac{1}{7}\}$

weglassen

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $ax^2+bx+c=0$:

$$\mathbf{x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$b^2-4ac=D$ heißt *Diskriminante*.

Es gilt:

$D>0$: zwei Lösungen x_1 und x_2
$D=0$: genau eine Lösung $x=\frac{-b}{2a}$
$D<0$: keine Lösung

Diese Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen müssen Sie **unbedingt auswendig können**! Sie ist Grundlage vieler Aufgaben, die Ihnen in der zwölften Klasse begegnen. Häufig wird die Formel auch als „Mitternachtsformel“ bezeichnet.

Beispiel: $\overset{a}{3}x^2\overset{b}{-2}x\overset{c}{-1}=0 \quad ; \quad x_{1/2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{2\pm 4}{6}=\begin{cases}1\\-\frac{1}{3}\end{cases}$

Stoff für 2.Jahr Berufsmatura

Betragsgleichungen

Der Betrag $|\ |$ einer Zahl gibt ihren Abstand zur Null auf dem Zahlenstrahl an. Z. B. $|2| = 2$; $|-3| = 3$.

Für die Betragsgleichung $|x| = 2$ gibt es beispielsweise zwei Lösungen: $x_1 = 2$ oder $x_2 = -2$, da der Abstand beider Zahlen zur Null gleich 2 ist. Kurz: $x_{1/2} = \pm 2$

Noch ein Beispiel: $|x-4| = 3$; $x_{1/2} - 4 = \pm 3$; $\underline{\underline{x_1 = 7}}$, $\underline{\underline{x_2 = 1}}$

Bruchgleichungen

Beispiel: $\frac{7}{x} + \frac{4}{3} = \frac{23-x}{3x} - \frac{1}{x}$; $G = \mathbb{R}$

Die Grundmenge – also die Zahlen, die zur Verfügung stehen – ist mit $\mathbb{R}$ vorgegeben. Der Nenner darf nie null werden, deshalb ist die *Definitionsmenge* hier $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (*lies:* D gleich die Menge R der reellen Zahlen ohne null).

Der Hauptnenner ist $3x$. Man multipliziert die gesamte Gleichung mit dem Hauptnenner $3x$ und erhält:

$$\frac{7 \cdot 3x}{x} + \frac{4 \cdot 3x}{3} = \frac{(23-x) \cdot 3x}{3x} - \frac{3x}{x} \xrightarrow{\text{Kürzen}} \frac{7 \cdot 3\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{4 \cdot \cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{(23-x) \cdot \cancel{3x}}{\cancel{3x}} - \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}$$

$21 + 4x = 23 - x - 3 \ / +x - 21$; $5x = -1 \ / :5$; $\underline{\underline{x = -\frac{1}{5}}}$

Lineare Gleichungssysteme

Sollen mindestens zwei lineare Gleichungen <u>gleichzeitig</u> gelöst werden, so spricht man von einem *linearen Gleichungssystem*.

Beispiel:
$$\begin{array}{lllll} \text{(I)} & y & -2x & -1 & = 0 \\ \text{(II)} & y & +x & +2 & = 0 \end{array}$$
Gesucht ist das Wertepaar $(x_0|y_0)$, das beide Gleichungen gleichzeitig löst.

Zur Berechnung der Lösung gibt es drei unterschiedliche Verfahren: das Einsetzungsverfahren, das Gleichsetzungsverfahren und das Additionsverfahren.

Einsetzungsverfahren Man löst eine Gleichung nach einer Unbekannten (hier y) auf und setzt diesen Term in die zweite Gleichung ein:

(I) $y = 2x + 1$ in (II): (II) $\underbrace{2x+1}_{y} + x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{Nach } x \text{ auflösen}} 3x + 3 = 0$; $\underline{x = -1}$ in (I) einsetzen:

(I) $y = 2 \cdot (-1) + 1$; $\underline{y = -1}$ Lösung: $\underline{\underline{(-1|-1)}}$

Gleichsetzungsverfahren Man löst beide Gleichungen nach der gleichen Unbekannten auf und setzt diese beiden Gleichungen gleich:

(I) $y = 2x + 1$ (II) $y = -x - 2$ (I) = (II): $2x + 1 = -x - 2 \xrightarrow{\text{Nach } x \text{ auflösen}} 3x = -3$; $\underline{x = -1}$

Jetzt $x = -1$ in eine der beiden Gleichungen (I) oder (II) einsetzen: (II) $y = -(-1) - 2$; $\underline{y = -1}$

Additionsverfahren Man addiert das Vielfache einer Gleichung zur anderen Gleichung, so dass eine der beiden Unbekannte (hier x) wegfällt:

(I)+2(II): $\underbrace{y - 2x - 1}_{\text{(I)}} + \underbrace{2y + 2x + 4}_{2\text{(II)}} = 0 \xrightarrow{x \text{ fällt weg}} 3y + 3 = 0$; $\underline{y = -1}$ in (I) oder (II):

(I) $-1 - 2x - 1 = 0$; $\underline{x = -1}$

Alle drei vorgestellten Lösungsverfahren sind gleichwertig. Welches Verfahren man einsetzt ist prinzipiell egal. Oft bietet sich jedoch eines der drei Verfahren an, um am schnellsten, d. h. mit geringstem Rechenaufwand, auf die gesuchte Lösung zu kommen. Dies zu erkennen ist wie in vielen Bereichen der Mathematik Übungssache.

Zwischentest

Lösen Sie die Aufgaben zu den bisher behandelten Inhalten und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Lösung.

1. Lösen Sie die Gleichung $\frac{5}{2}x - \frac{7}{2} = x + 1 - (3x - 1{,}5)$
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $x \in \mathbb{R}$: $(x-3)(1-x) - (x+2)x + 6 = 4 - x^2$
3. Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungsmenge in der Grundmenge $G = \mathbb{R}$: $16x^2 - 24x + 9 = 25$
4. Das Doppelte einer Zahl vermindert um das Dreifache einer zweiten Zahl ergibt 5. Vermindert man das Vierfache der zweiten Zahl um die erste, so erhält man wieder 5. Berechnen Sie die beiden Zahlen mit Hilfe eines Gleichungssystems.
5. Bestimmen Sie rechnerisch die Lösung des linearen Gleichungssystems:
   $$\begin{array}{ll} \text{I)} & 2x - 3y = -10 \\ \text{II)} & 14x + 2y = 22 \end{array} \quad \text{, wobei } x, y \in \mathbb{R}$$
6. Lösen Sie die folgende Gleichung in der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$: $1 - 5\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{11}{x} \quad (x \neq 0)$

weglassen

7. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und berechnen Sie die Lösungsmenge L. Grundmenge $G = \mathbb{Q}$.
   $$\frac{x}{18 - 6x} - \frac{-\frac{1}{2}x}{3x + 9} = \frac{6}{2x^2 - 18}$$
8. Geben Sie die Lösungsmenge L folgender Betragsgleichung in der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$ an.
   $$|x - 3| = -|x - 3| + 8$$

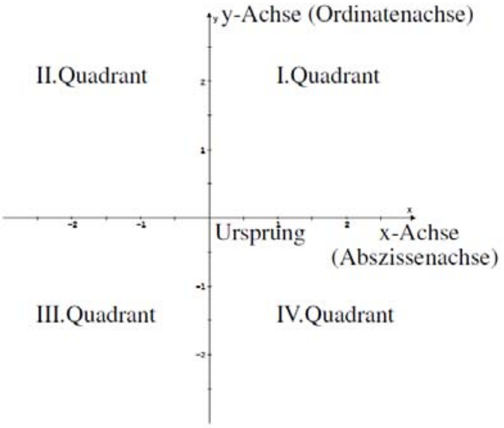
Lösungen

1. $x = \frac{4}{3}$
2. $L = \{1\}$
3. $L = \{-0{,}5; 2\}$
4. I) $2x - 3y = 5$; II) $-x + 4y = 5$; $x = 7, y = 3$
5. $x = 1, y = 4$
6. $x = \frac{3}{7}$
7. $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$; $L = \{\}$, da $-3 \notin D$.
8. $L = \{-1; 7\}$

Funktionen

Ordnet man jedem Element x der Definitionsmenge D genau ein Element y der Wertemenge W zu, so spricht man von einer *Funktion*.
Andernfalls wird die Zuordnung *Relation* genannt.

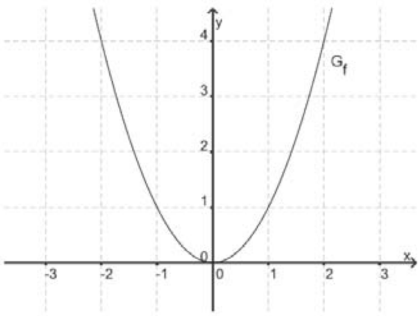
Koordinatensystem



Der Graph der Funktion, also die gezeichnete Darstellung der Zuordnung, wird in einem *kartesischen Koordinatensystem* dargestellt.

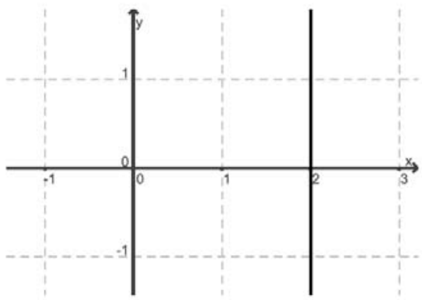
Bei einem **kartesischen** Koordinatensystem stehen die Koordinatenachsen *senkrecht* zueinander.
Die Skalierung ist hier *linear*, d. h. die Einteilung der Achsen erfolgt in gleichen Abständen.

Funktion $f: x \mapsto x^2 \quad , \quad D = \mathbb{R}$



Der Name der Funktion ist f. Der Graph der Funktion wird mit G_f bezeichnet. Jedem Wert x wird *genau ein* Wert y zugeordnet. Häufig schreibt man statt $f: x \mapsto x^2$ auch abkürzend $f(x) = x^2$ oder auch $y = x^2$. Die Wertemenge W ist hier $\mathbb{R}_0^+$.

Relation (Gleichung $x = 2$)



Bei einer Relation wird einem Wert von x mehr als ein Wert von y zugeordnet. Hier werden dem Wert $x = 2$ unendlich viele Werte von y zugeordnet. Man erhält eine senkrechte Gerade.

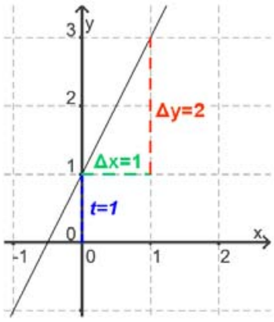
Lineare Funktionen

Allgemeine Funktionsgleichung der linearen Funktion:

$\mathbf{y = m \cdot x + t}$ wobei m: Steigung und t: y-Achsenabschnitt.

Bei einer *linearen Funktion* tritt die Variable x höchstens mit dem Exponenten 1 auf.
Tritt kein x auf (also Exponent gleich Null), so spricht man von einer *konstanten Funktion*.
Der Graph jeder linearen Funktion ist eine Gerade.

Beispiel: $f(x) = 2x + 1$



Der y-Achsenabschnitt t ist hier 1. Das eingezeichnete Steigungsdreieck liefert über die Beziehung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2 = m$ die Steigung der Geraden.

Die Zeichnung des Graphen der Funktion in das kartesische Koordinatensystem ist möglich über die Kenntnis des y-Achsenabschnitts t und der Steigung m (ausgehend von einem Punkt der Geraden Eins nach rechts (Δx) und Zwei nach oben (Δy)) oder alternativ mithilfe eine Wertetabelle durch Einsetzen verschiedener Werte von x in die Funktionsgleichung:

x	-1	0	1
y	-1	1	3

Die Steigung einer Geraden ist festgelegt durch $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

Der y-Achsenabschnitt t gibt den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse durch $(0|t)$ an.

Liegt ein Punkt $P(x_0|y_0)$ auf der Geraden, so erfüllt er die Funktionsgleichung $y = mx + t$.

Gilt für die Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden $m_1 \cdot m_2 = -1$, so stehen die beiden Geraden senkrecht zueinander.

Zwischentest

Lösen Sie die Aufgaben zu den bisher behandelten Inhalten und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Lösung.

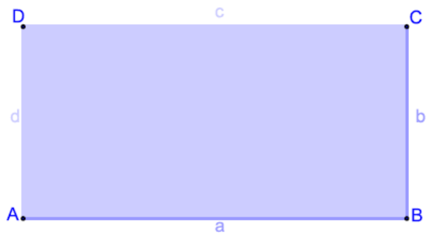
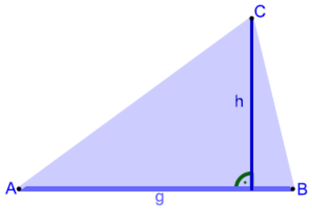
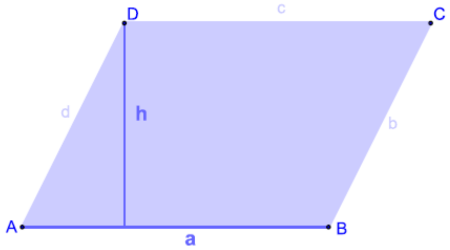
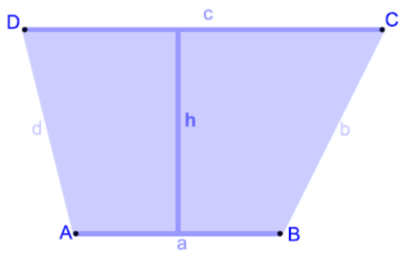
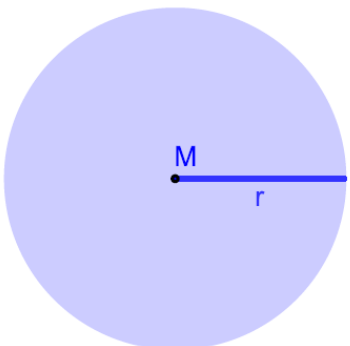
1. Gegeben ist die Gleichung der Geraden $g: y = 2ax + 1$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.
   Bestimmen Sie den Parameter a so, dass
   (a) der Punkt $P(1|5)$ auf der Geraden g liegt.
   (b) die Gerade g parallel ist zur Geraden $h: y = \frac{1}{2}x - 5$.
   (c) die Gerade g die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 4x$ berührt.
2. Die Geraden G_a sind durch $g_a(x) = 3a^2 + 4x$ gegeben, $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Begründen Sie, warum keine der Geraden g_a durch den 4. Quadranten des Koordinatensystems verläuft.
   (b) Berechnen Sie, für welche a-Werte die Geraden eine Nullstelle bei $x_N = -3$ haben.
3. Die Gerade h schneidet die y-Achse in $y_1 = 2$ und steht senkrecht auf der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten. Wie lautet $h(x)$?

Lösungen

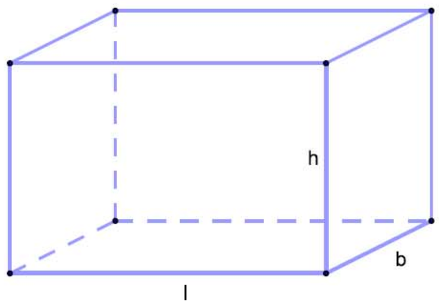
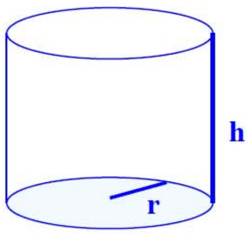
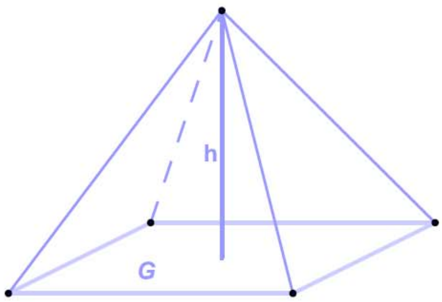
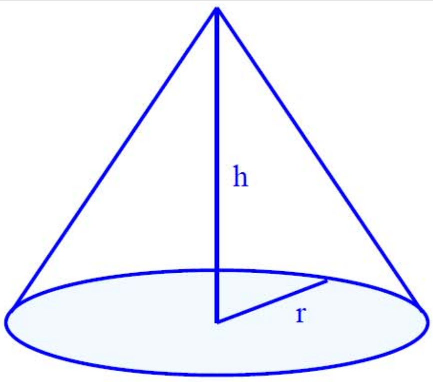
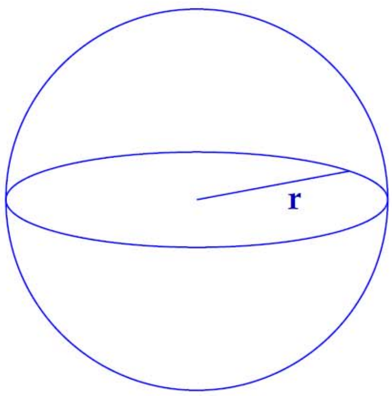
1. (a) $a = 2$ (b) $a = 0{,}25$ (c) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$
2. (a) Im vierten Quadranten gilt $x > 0$ und $y < 0$. Ist aber $x > 0$, so sind alle y-Werte der Geraden auch größer als null, da $3a^2 \geq 0$. (b) $a_1 = -2$, $a_2 = 2$
3. $h(x) = -x + 2$

Geometrie

Flächenberechnung ebener Figuren

Rechteck		$F = a \cdot b$
Dreieck		$F = \frac{1}{2} g h$
Parallelogramm		$F = a \cdot h$
Trapez		$F = \frac{a+c}{2} \cdot h$
Kreis		$U = 2 \cdot r \cdot \pi$ $F = r^2 \cdot \pi$

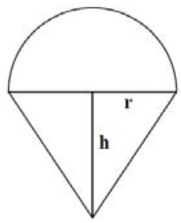
Flächen- und Volumenberechnung räumlicher Figuren

<table>
<tr><td>Quader</td><td></td><td>$O = 2(b \cdot l + b \cdot h + h \cdot l)$
$V = l \cdot b \cdot h$</td></tr>
<tr><td>Zylinder</td><td></td><td>$O = 2r \cdot \pi \cdot h + 2r^2 \cdot \pi$
$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$</td></tr>
<tr><td>Pyramide</td><td></td><td>$V = \frac{1}{3} G \cdot h$</td></tr>
<tr><td>Kegel</td><td></td><td>$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h$</td></tr>
<tr><td>Kugel</td><td></td><td>$O = 4r^2 \cdot \pi$
$V = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$</td></tr>
</table>

Zwischentest

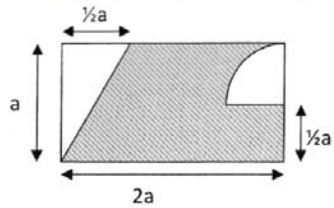
Lösen Sie die Aufgaben zu den bisher behandelten Inhalten und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Lösung.

1. Eine Waffeltüte mit Eiskugel besitzt als Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck mit aufgesetztem Halbkreis (s. Abb.). Das Dreieck besitzt die Höhe $h = 7\,\text{cm}$, der Halbkreis den Radius $r = 2\,\text{cm}$.
   (a) Berechnen Sie die Querschnittsfläche der Eistüte.
   (b) Berechnen Sie das Volumen der Eistüte.
   (c) 8 derartige Eistüten sind in einer quaderförmigen Packung mit der Länge $l = 20\,\text{cm}$, der Breite $b = 11\,\text{cm}$ und der Höhe $h = 4\,\text{cm}$ enthalten. Berechnen Sie, wie viel Prozent des Gesamtvolumens der Packung von den Eistüten ausgefüllt wird, wenn jede Eistüte ein Volumen von $46{,}1\,\text{cm}^3$ hat.



2. Eine Glaskugel mit 18 cm Durchmesser wird in einem möglichst kleinen, würfelförmigen Holzkästchen verpackt. Als zusätzliche Schutzmaßnahme wird in sämtliche Hohlräume zwischen Kugel und Kästchenwände zerkleinertes Styropor eingefüllt. Berechnen Sie das Volumen des dazu benötigten Styropors. Ermitteln Sie durch Rechnung, ob man mehr oder weniger Styropor benötigt, wenn man statt des würfelförmigen Kästchens ein zylinderförmiges Kästchen verwendet.

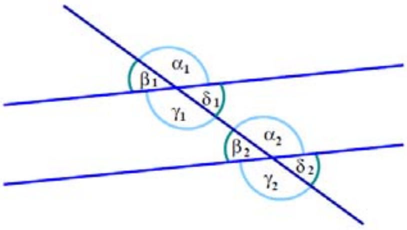
3. Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $2a$. Der Mittelpunkt des Viertelkreises halbiert dabei die rechte Seite. Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a.



Lösungen

1. (a) $20{,}28\,\text{cm}^2$
   (b) $46{,}08\,\text{cm}^3$
   (c) $V_{\text{Quader}} = 880\,\text{cm}^3$; $V_{\text{Eistüten}} = 368{,}8\,\text{cm}^3$; $41{,}9\,\%$
2. $V_W = 5832\,\text{cm}^3$; $V_K = 3053{,}6\,\text{cm}^3$; $V_S = 2778{,}4\,\text{cm}^3$; $V_Z = 4580{,}4\,\text{cm}^3 < V_W$
3. $A = \frac{28-\pi}{16}a^2$

Winkelsätze



Auftretende Winkelarten bei einer Doppelkreuzung mit parallelen Geraden:

Scheitelwinkel sind gleich groß. $\alpha_1 = \gamma_1, \beta_1 = \delta_1, \alpha_2 = \gamma_2, \beta_2 = \delta_2$

Nebenwinkel ergeben zusammen 180°. $\alpha_1 + \beta_1 = 180°, \beta_1 + \gamma_1 = 180° \ldots$

Stufenwinkel (F-Winkel) sind gleich groß. $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2 \ldots$

Wechselwinkel (Z-Winkel) sind gleich groß. $\alpha_1 = \gamma_2, \beta_1 = \delta_2, \gamma_1 = \alpha_2 \ldots$

In jedem *Dreieck* beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

In jedem *Viereck* beträgt die Summe der Innenwinkel 360°.

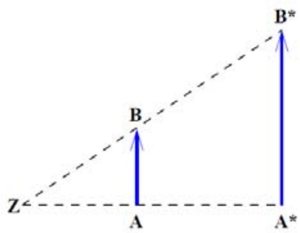
Strahlensätze und Ähnlichkeit

1. Strahlensatz Zwei Strecken auf dem einen Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Strecken auf dem anderen Strahl.

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA^*}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB^*}} \quad ; \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA^*}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB^*}} \quad ; \quad \frac{\overline{ZA^*}}{\overline{AA^*}} = \frac{\overline{ZB^*}}{\overline{BB^*}}$$

2. Strahlensatz Die beiden Parallelstrecken verhalten sich wie die Entfernungen entsprechender Endpunkte zum Geradenschnittpunkt.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A^*B^*}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA^*}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB^*}}$$



Ähnlichkeit

Zwei Figuren, die durch eine maßstabsgetreue Vergrößerung oder Verkleinerung auseinander hervorgehen nennt man *ähnlich* zueinander.

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie

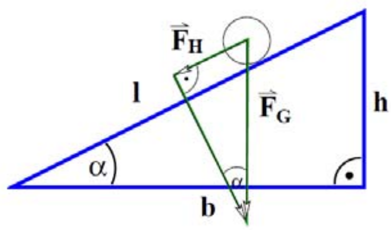
(1) in zwei Winkeln übereinstimmen oder

(2) die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich groß sind.

Beispiel: Physik, Kugel auf schiefer Ebene

Die beiden Dreiecke sind ähnlich zueinander, da sie in zwei Winkeln übereinstimmen. Somit gilt:

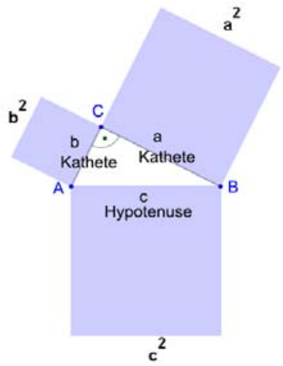
$$\frac{F_G}{l} = \frac{F_H}{h} \quad ; \quad \frac{F_G}{F_H} = \frac{l}{h}$$



Der Satz des Pythagoras

In einem *rechtwinkligen* Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

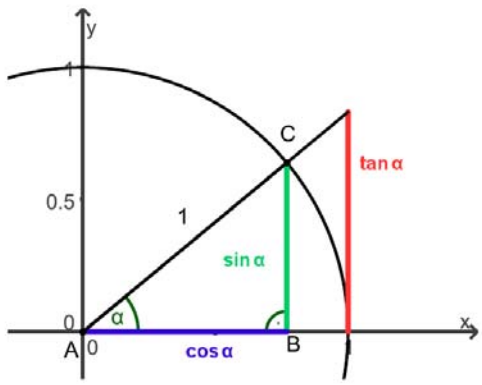
Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Radius 1.

Wählt man einen Punkt C auf dem Kreis, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck ABC.

Die Länge der *Hypotenuse* ist 1.
Die Länge der Seite, die dem Winkel α gegenüber liegt (*Gegenkathete*) ist $\sin\alpha$.
Die Länge der *Ankathete* ist $\cos\alpha$.
Die Länge des Abschnitts der Tangente an den Kreis ist $\tan\alpha$.

Wegen des Satzes des Pythagoras gilt für alle Winkel α:

$$\boxed{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1}$$



Sinus und Kosinus nehmen abhängig vom Winkel α Werte zwischen -1 und 1 an.

$$-1 \le \sin\alpha \le 1$$

$$-1 \le \cos\alpha \le 1$$

Werte der Winkelfunktionen für versch. Winkel α:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.	0

Allgemein gilt in jedem beliebigen *rechtwinkligen* Dreieck:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Beispiel:
$\sin\alpha = \frac{3\,\text{cm}}{4\,\text{cm}}$; $\sin\alpha = 0{,}75$; (Taschenrechner auf DEG) $\boxed{\texttt{SHIFT}}$ $\boxed{\texttt{sin}}$ `0.75` $\boxed{=}$ `48.5903...` ; $\underline{\underline{\alpha \approx 48{,}590°}}$

Zwischentest

Lösen Sie die Aufgaben zu den bisher behandelten Inhalten und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Lösung.

1. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 3 cm und 4 cm lang. Berechnen Sie die Länge der Hypotenuse.
2. Berechnen Sie die Länge der Diagonalen eines Quadrats mit dem Flächeninhalt $9\,\text{cm}^2$.
3. Berechnen Sie die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 120 cm.
4. Wie groß ist der Abstand der beiden Punkte $A(1|0)$ und $B(3|4)$ im kartesischen Koordinatensystem?
5. Berechnen Sie folgende Werte auf drei Nachkommastellen gerundet mit dem Taschenrechner:
   $\sin(35^\circ)$; $\sin(70^\circ)$; $\cos(35^\circ)$; $\cos(70^\circ)$; $\tan(35^\circ)$; $\tan(-90^\circ)$; $(\sin 2^\circ)^2+(\cos 2^\circ$
6. Bestimmen Sie rechnerisch die Winkel α und β in einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$, sowie die Länge der dritten Seite.
   a) $a = 3\,\text{cm}$; $c = 6\,\text{cm}$ b) $b = 3\,\text{cm}$; $c = 5\,\text{cm}$ c) $a = 3\,\text{cm}$; $b = 4\,\text{cm}$

Lösungen

1. 5 cm
2. $3\sqrt{2}\,\text{cm} \approx 4{,}24\,\text{cm}$
3. $60\sqrt{3}\,\text{cm} \approx 103{,}92\,\text{cm}$
4. $2\sqrt{5}$
5. $\sin(35^\circ) \approx 0{,}574$; $\sin(70^\circ) \approx 0{,}940$; $\cos(35^\circ) \approx 0{,}819$
   $\cos(70^\circ) \approx 0{,}342$; $\tan(35^\circ) \approx 0{,}700$; $\tan(-90^\circ)$ Nicht definiert!
   $(\sin 2^\circ)^2 + (\cos 2^\circ)^2 = 1$
6. a) $b = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ b) $a = 4\,\text{cm}$, $\alpha \approx 53{,}13^\circ$, $\beta \approx 36{,}87^\circ$
   c) $c = 5\,\text{cm}$, $\alpha \approx 36{,}87^\circ$, $\beta \approx 53{,}13^\circ$

Übungsserie: Gleichungen

Ist das Ergebnis eine Bruchzahl, soll es als reiner Bruch angegeben werden. Ausser bei den Aufgaben 1, 2, 3 und 5 ist die Angabe eines Lösungswegs obligatorisch.

1. a) $5x + 4 = 19$ b) $3x - 4 = 20$ c) $70 - 3x = 40$ d) $29 = 6z - 13$
2. a) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = 25$ b) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = 12$ c) $\frac{3}{4}y + 16 = \frac{1}{4}y + 36$ d) $3\frac{1}{2}x - (\frac{1}{4}x + 1) = 2\frac{1}{4}x$
3. a) $7(x - 5) = 35 + 7$ b) $10 - (y - 4) = 2y$ c) $(4x - 5) - 3 = 1$ d) $15 - (10 - x) = 0$
4. a) $24(x - 1) = 15(x - 2)$ b) $12(x + 1) = 9(x - 2)$ c) $10x - 2(15 - 7x) = 5(5x - 7)$
5. a) $(120 - 8x)(12 + 8x) = 0$ b) $111x(6x + 60 - x)(4x - 10) = 0$ c) $3x(4 + x)(16 - 5x)(16x + 24) = 0$
6. a) $40 - 21(3x + 5) - 12(3 - 5x) + 8 = 0$ b) $(-16) - 3(4x + 7) = (-10) + 9(x - 3)$
7. a) $(x - 5)(x + 8) = (x - 6)(x + 7) + 26$ b) $2x^2 - (x + 3)(x - 3) = (x + 1)^2 - 2x + 8$
8. a) $17 - 3[x - (3x - 1) - 4(x + 1) - 7] = 16 - 2(x + 15)$ b) $(5x - 1)^2 - x[10x - 3(x - 4)] = 18x^2 - 21$
9. a) $ax + bx = c$ b) $qx = 1 - px$ c) $0.5bx - 3 = 4x$ d) $2kx - 3 = 4x + 1$
10. a) $a + x + 8 - b = 12 + 5a - 5b$ b) $3(2a - x) - 5(3a - 2x) = 3(2b - 3x)$
11. a) $(x - b)^2 = (x - a)^2$ b) $2mx(mx - n) - 2(mx - n)^2 = mn(m + n) - 2n^2$
12. Lösen Sie nach allen Unbekannten auf:
    a) $gb = bf + fg$ b) $A = 2(ab + ac + bc)$

LÖSUNGEN

1a) 3 b) 8 c) 10 d) 7 2a) 60 b) 24 c) 40 d) 1 3a) 11 b) $\frac{14}{3}$ c) $\frac{9}{4}$ d) -5

4a) $-\frac{2}{3}$ b) -10 c) 5 5a) $x_1 = 15$, $x_2 = -\frac{3}{2}$ b) $x_1 = -12$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2.5$ c) $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{16}{5}$

6a) -31 b) 0 7a) 12 b) beliebig 8a) -3.05 b) 1 9a) $\frac{c}{a+b}$ b) $\frac{1}{p+q}$ c) $\frac{3}{0.5b-4}$ d) $\frac{2}{k-2}$

10a) $4 + 4a - 4b$ b) $\frac{9a+6b}{16}$ 11a) $\frac{a+b}{2}$ b) $\frac{m+n}{2}$

12a) $b = \frac{fg}{g-f}$, $f = \frac{bg}{b+g}$, $g = \frac{bf}{b-f}$ b) $a = \frac{A-2bc}{2b+2c}$, $b = \frac{A-2ac}{2a+2c}$, $c = \frac{A-2ab}{2a+2b}$

Übungsserie: Faktorisieren

Vermischte Aufgaben zur Faktorzerlegung; arbeiten Sie nach folgendem Raster:

- Lässt sich ein gemeinsamer Faktor vor die Klammer schreiben?
- Ist es eine binomische Formel?
- Ist es eine binomähnliche Formel (3 Glieder, eines quadratisch)?
- Kommt man mit einer Gruppenbildung weiter (oft eine Summe aus vier Summanden)?
- Bin ich fertig oder lässt sich ein Term weiter faktorisieren?

1 $c^2 - 20c + 36 =$

2 $4x^2 - a^2 =$

3 $14a^2b^2c - 16a^2bc^2 - 18ab^2c^2 =$

4 $p^2 - 4p + 4 =$

5 $30m^2n^2 + 75mn^2 - 105n^3 =$

6 $g^2 + h^2 - 2gh =$

7 $1 - 64z^2 =$

8 $m^2 + mn - 2n^2 =$

9 $1 - 4uv - 5u^2v^2 =$

10 $a^2 - 5a - 14 =$

11 $10x^3y^2z^3 - 15xy^3z^3 + 5xy^2z^3 =$

12 $r^2 - 4rs + 4s^2 =$

13 $9z^4 - 36z^3 + 27z^2 =$

14 $-3k^2 + 3k - 60 =$

15 $72n^2 + 168n + 98 =$

16 $-c^4 - 2c^3d - c^2d^2 =$

17 $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 =$

18 $3a^3 - 6a^2 - 24a =$

19 $n^2(4n + 4) + (4n + 4)^2 =$

20 $p(3w + 3) + (p - 5)(2w + 2) =$

21 $d^2 - 10d + 25 - 16c^2 =$

22 $m^2 - q^2 + 10q - 25 =$

1 $c^2 - 20c + 36 =$
keine binomische Formel aber: $= (c-18)(c-2)$

2 $4x^2 - a^2 =$
3. binomische Formel: $= (2x+a)(2x-a)$

3 $14a^2b^2c - 16a^2bc^2 - 18ab^2c^2 = 2abc(7ab - 8ac - 9bc)$

4 $p^2 - 4p + 4 =$
2. binomische Formel: $= (p-2)^2$

5 $30m^2n^2 + 75mn^2 - 105n^3 = 15n^2(2m^2 + 5m - 7n)$

6 $g^2 + h^2 - 2gh =$
besser ordnen und man erkennt eine 2. binomische Formel: $g^2 - 2gh + h^2 = (g-h)^2$

7 $1 - 64z^2 =$
Auch 1 ist eine Quadratzahl! 3. binomische Formel: $= (1-8z)(1+8z)$

8 $m^2 + mn - 2n^2 =$
keine binomische Formel, aber: $= (m+2n)(m-n)$

9 $1 - 4uv - 5u^2v^2 =$
keine binomische Formel, aber: $= (1-5uv)(1+uv)$

10 $a^2 - 5a - 14 =$
keine binomische Formel, aber: $= (a-7)(a+2)$

11 $10x^3y^2z^3 - 15xy^3z^3 + 5xy^2z^3 = 5xy^2z^3(2x^2 - 3y + 1)$

12 $r^2 - 4rs + 4s^2 =$
2. binomische Formel: $(r-2s)^2$

13 $9z^4 - 36z^3 + 27z^2 = 9z^2(z^2 - 4z + 3)$
Achtung! der Klammerausdruck lässt sich weiter zerlegen: $= 9z^2(z-3)(z-1)$

14 $-3k^2 + 3k - 60 = -3(k^2 - k + 20)$
Achtung! der Klammerausdruck lässt sich weiter zerlegen: $= -3(k-5)(k+4)$

15 $72n^2 + 168n + 98 = 2(36n^2 + 84n + 49)$
eine binomische Formel wird sichtbar! $= 2(6n+7)^2$

16 $-c^4 - 2c^3d - c^2d^2 = -c^2(c^2 + 2cd + d^2)$
eine binomische Formel wird sichtbar! $= -c^2(c+d)^2$

17 $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 =$
2. binomische Formel: $= (a^2 - b^2)^2$
in der Klammer steht eine 3. binomische Formel!
$= ((a+b)(a-b))^2 = (a+b)(a-b)(a+b)(a-b) = (a+b)^2(a-b)^2$

18 $3a^3 - 6a^2 - 24a = 3a(a^2 - 2a - 8)$
Achtung! der Klammerausdruck läßt sich weiter zerlegen: $3a(a-4)(a+2)$

19 $n^2(4n+4) + (4n+4)^2 = n^2\mathbf{(4n+4)} + (4n+4)\mathbf{(4n+4)} = \left[n^2 + (4n+1)\right]\mathbf{(4n+4)}$
Weiter gilt: $[n^2 + (4n+4)] = [n^2 + 4n + 4] = (n+2)^2$ und: $(4n+4) = 4(n+1)$
womit: $n^2(4n+4) + (4n+4)^2 = (n+2)^2 \cdot 4(n+1) = 4(n+1)(n+2)^2$

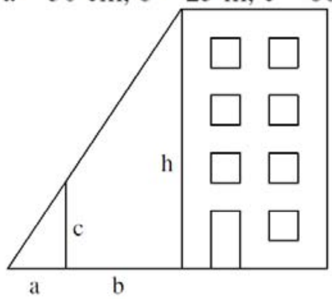
20 $p(3w+3) + (p-5)(2w+2) =$
jede Klammer lässt sich weiter vereinfachen:
$3p(w+1) + 2(p-5)(w+1) = 3p\mathbf{(w+1)} + (2p-10)\mathbf{(w+1)} =$
nun lässt sich $\mathbf{(w+1)}$ ausklammern:
$(3p + (2p-10))\mathbf{(w+1)} = (5p-10)\mathbf{(w+1)} = 5(p-2)(w+1)$

21 $d^2 - 10d + 25 - 16c^2 =$
schwierige Aufgabe! Folgendes muss Ihnen auffallen: $d^2 - 10d + 25 - 16c^2 = (d-5)^2 - 16c^2$
die Aufgabe ist nicht fertig: 3. binomische Formel (Quadrat minus Quadrat):
$= [(d-5) + 4c][(d-5) - 4c] = (d-5+4c)(d-5-4c)$

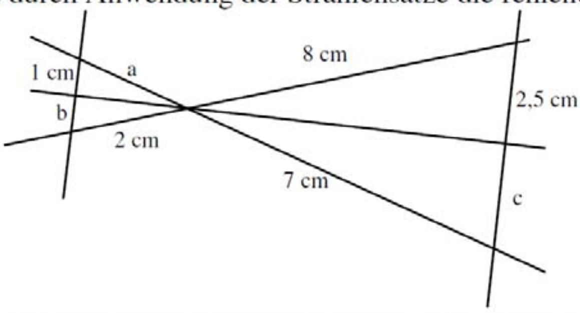
22 $m^2 - q^2 + 10q - 25 =$
noch etwas schwieriger, aber ähnlich wie 21: $m^2 - q^2 + 10q - 25 = m^2 - (q^2 - 10q + 25)$
weiter wie 21: $= m^2 - (q-5)^2$
und nun vorsichtig! $= [m - (q-5)][m + (q-5)] = (m-q+5)(m+q-5)$

Übungsserie: Strahlensätze und Ähnlichkeit

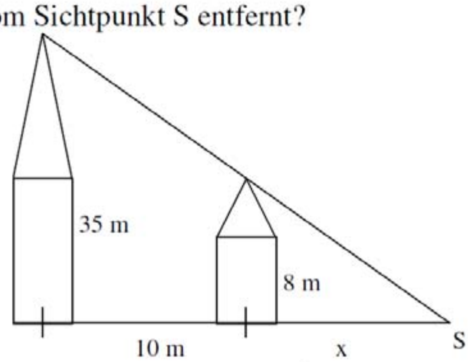
Aufgabe 1: Um die Höhe eines Hauses zu bestimmen, mißt man in der untenstehenden Skizze die Strecken a = 50 cm, b = 25 m, c = 80 cm. Wie hoch ist das Haus?



Aufgabe 2: Berechne durch Anwendung der Strahlensätze die fehlenden Größen a, b, und c!



Aufgabe 3: Wie in der untenstehenden Skizze kennt man die Entfernung vomWohnhaus zur Kirche und die Höhen des Wohnhauses und der Kirche. Wie weit ist das Wohnhaus vom Sichtpunkt S entfernt?



LÖSUNGEN

Aufgabe 1: Durch Anwendung des 2. Strahlensatzes erhält man den Ansatz: $\frac{h}{c} = \frac{a+b}{a}$.

Setzt man die Werte für a, b und c ein, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{h}{0{,}8} = \frac{0{,}5+25}{0{,}5} \Rightarrow h = \frac{25{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}5} = 40{,}8 \text{ m}$$

Aufgabe 2: Berechne a durch Anwendung des 3. Strahlensatzes: $\frac{a}{7} = \frac{2}{8} \Rightarrow a = 1{,}75$

Berechne b durch Anwendung des 2. Strahlensatzes: $\frac{b}{2{,}5} = \frac{2}{8} \Rightarrow b = 0{,}625$

Berechne c durch Anwendung des 3. Strahlensatzes: $\frac{c}{1} = \frac{7}{a} \Rightarrow c = \frac{7}{1{,}75} = 4$

Aufgabe 3: Mithilfe der Skizze läßt sich durch den 2. Strahlensatz die Aussage machen:

$$\frac{x+10}{x} = \frac{35}{8} \Rightarrow 8x + 80 = 35x \Rightarrow 80 = 27x \Rightarrow x = \frac{80}{27} \approx 2{,}96 \text{ m}$$