PLAN DES ÉTUDES GYMNASIALES

DOMAINES DES MATHÉMATIQUES
MATHÉMATIQUES

Plan d'études cadre actualisé, CDIP 2016
Entrée en vigueur année scolaire 2021/22
Edition novembre 2020

1. Dotation horaire (leçons hebdomadaires)

Niveaux	1	2	3	4
Discipline fondamentale Mathématiques I	4	4	4	4
Discipline fondamentale Mathématiques II		5	5	5

Après la première année chaque étudiante et chaque étudiant a le choix entre les cours de mathématiques I (standard) ou II (renforcé). Aux étudiantes et étudiants intéressés, le cours de mathématiques II offre un enseignement approfondi en vue d'études où les mathématiques jouent un rôle important (étudiants en sciences économiques ou en sciences naturelles, futurs ingénieurs). Les étudiants et étudiantes qui choisissent l'option spécifique *Physique et Application des mathématiques* doivent obligatoirement suivre le cours de mathématiques II.

2. Objectifs généraux de formation

L'enseignement des mathématiques permet à l'élève d'acquérir un outil intellectuel sans lequel il lui sera difficile de progresser dans la connaissance scientifique.

Cet outil, comme science de la quantité, du modèle et de la structure déductive est particulièrement adapté au traitement des concepts abstraits que l'on trouve dans les sciences exactes ou expérimentales et dans certaines sciences humaines et sociales.

L'enseignement doit montrer que les mathématiques ne constituent pas uniquement un langage à l'aide duquel une question scientifique peut être posée et résolue, mais qu'elles constituent un vaste corps de structures, de méthodes et de raisonnements précis et rigoureux.

Le monde des mathématiques est un champ de connaissances que l'homme, depuis l'Antiquité, cherche à élargir et à compléter par une recherche et une remise en cause continues. L'enseignement doit faciliter l'approche des mathématiques en exposant la théorie et ses applications. Il donne à l'élève l'envie et le goût de s'y intéresser.

3. Objectifs fondamentaux

3.1. Attitudes

- Accepter l'effort et faire preuve de persévérance
- Être autonome dans le travail
- Être capable de travailler en groupe

- Être imaginatif, curieux et ouvert
- Posséder le sens de la rigueur et de l'autocritique
- Faire preuve de probité intellectuelle, de souplesse d'esprit et d'intuition
- Avoir l'esprit d'analyse et de synthèse
- Apprécier l'aspect esthétique d'une théorie
- Aimer les jeux de l'esprit

3.2. Savoir-faire

- Faire preuve d'aisance dans l'utilisation de ses connaissances mathématiques
- Maîtriser les règles, les principes et les contraintes du raisonnement logique
- Pouvoir imaginer des situations géométriques
- Savoir appliquer des méthodes mathématiques connues à des problèmes posés dans divers domaines
- Savoir utiliser des méthodes de travail et d'investigation
- Être capable de formuler des propositions d'une manière claire et précise
- Être à même de porter un jugement critique sur les résultats obtenus dans le cadre d'une modélisation
- Savoir organiser ses connaissances mathématiques de manière à faciliter la recherche d'analogies
- Savoir exposer et discuter la démarche de travail adoptée

3.3. Connaissances

- Connaître les principaux objets et méthodes mathématiques :
  - en arithmétique: les règles du calcul avec leurs conventions d'écriture
  - en algèbre: le calcul littéral et les équations
  - en analyse: les fonctions, le calcul différentiel et intégral
  - en géométrie: la géométrie élémentaire, analytique et vectorielle,
  - la trigonométrie
  - en stochastique: la statistique et le calcul des probabilités
- Connaître certains aspects de l'histoire des mathématiques

4. Objectifs sommaires – Contenus – Matières apparentées

4.1. Mathématiques : discipline fondamentale

Objectifs sommaires	Contenus	Matières apparentées
1re année		
Géométrie vectorielle I - Connaître les vecteurs en tant qu'outil mathématique servant à l'étude de grandeurs orientées - Connaître et savoir utiliser les bases du calcul vectoriel	- Notion de vecteur - Addition de vecteurs, multiplication d'un vecteur par un nombre - Décomposition d'un vecteur	- Géométrie: translation, homothétie - Physique: force, vitesse, accélération.
Etude des fonctions et des équations I Reconnaître, représenter et interpréter les relations simples entre deux grandeurs	- Notion de fonction - Fonctions linéaires, systèmes d'équations linéaires - Fonctions du deuxième degré, équations et inéquations du deu-	- Sciences: fonctions en tant que modèles mathématiques dans le domaine des sciences naturelles et sociales (proportionnalité, horaires, etc.)

	xième degré - Calcul de puissances, équations du type $x^a = b$ - Polynômes, factorisation	

4.2. Mathématiques : discipline fondamentale Mathématique I

Objectifs sommaires	Contenus	Matières apparentées
2e année **Etude des fonctions et des équations II** - Reconnaître, représenter et interpréter les relations entre deux grandeurs	- Notion de fonction réciproque - Fonctions trigonométriques définies sur le cercle trigonométrique - Théorèmes du sinus et du cosinus - Equations trigonométriques simples - Fonctions puissances - Fonctions exponentielles et logarithmiques - Equations exponentielles et logarithmiques - Suites et séries arithmétiques et géométriques - Parité, domaine de définition, zéros, signe	- Arpentage - Astronomie - Sciences naturelles et sociales: fonctions en tant que modèles mathématiques (oscillations harmoniques, phénomènes de croissance, etc.) - Musique: intervalles - Mathématiques financières
Géométrie vectorielle II - Connaître et savoir utiliser les bases du calcul vectoriel - Appliquer le calcul vectoriel à des problèmes de géométrie	- Produit scalaire - Equations de droites	- Géométrie: distances, angles, longueurs, cercle, plan, sphère - Physique: travail
Stochastique I - Lire les statistiques de manière critique, - Etablir des statistiques simples	Statistique descriptive	- Tous les domaines: lecture et établissement de statistiques

3e année **Géométrie vectorielle III** - Approfondir le calcul vectoriel, l'appliquer à la géométrie	- Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte - Applications à la géométrie	- Géométrie: distances, angles, longueurs, aires et volumes, droite, cercle, plan, sphère - Physique: travail, moments, force de Lorentz, etc.

Analyse I - Reconnaître la signification du calcul différentiel dans les sciences de la nature, la technique et les sciences économiques - Connaître les bases du calcul différentiel	- Notion de limite - Définition de la dérivée - Pente de la tangente, taux d'accroissement - Règles du calcul des dérivées - Dérivées des fonctions puissances et des fonctions trigonométriques - Etudes de fonctions à l'aide de quelques exemples - Problèmes d'optimisation	- Sciences naturelles: divers taux d'accroissement tels que vitesse, accélération, etc. - Sciences économiques: grandeurs marginales, élasticité, etc. - Géométrie et technique: problèmes d'optimisation - Géométrie: coniques

4e année **Analyse II** - Appliquer le calcul différentiel (voir Analyse I) à des situations plus élaborées - Reconnaître la signification du calcul intégral dans les sciences de la nature, les techniques et les sciences économiques. Connaître les bases du calcul intégral	- Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques - Définition de l'intégrale - Primitives - Théorème fondamental du calcul intégral - Calcul d'aires - Applications	- Sciences naturelles: croissance exponentielle, logistique - Sciences naturelles: travail, moment d'inertie - Calcul des probabilités: densités - Géométrie: volumes de rotation, longueurs d'arc, etc.
Stochastique II - Poursuite de l'étude des outils élémentaires servant à l'analyse de phénomènes aléatoires	- Analyse combinatoire - Notion de probabilité - Règles du calcul des probabilités - Diagrammes en arbres - Variables aléatoires discrètes, espérance mathématique - Distribution binomiale	- Economie: contrôle de qualité, théorie de la décision - Biologie: génétique - Physique: théorie de la chaleur - Technique: fiabilité des systèmes

4.3. Mathématiques : discipline fondamentale Mathématiques II

Objectifs sommaires	Contenus	Matières apparentées
2e année **Etude des fonctions et des équations II** - Reconnaître, représenter et interpréter les relations entre deux grandeurs	- Notion de fonction réciproque - Fonctions trigonométriques définies sur le cercle trigonométrique - Théorèmes du sinus et du cosinus - Théorèmes d'addition - Equations trigonométriques simples - Fonctions puissances - Fonctions exponentielles et logarithmiques. - Equations exponentielles et logarithmiques - Suites et séries arithmétiques et géométriques	- Arpentage - Astronomie - Sciences naturelles et sociales: fonctions en tant que modèles mathématiques (oscillations harmoniques, phénomènes de croissance, etc.) - Musique: intervalles - Mathématiques financières - Principe d'induction
Géométrie vectorielle II - Connaître et savoir utiliser les	- Produit scalaire	- Géométrie: distances, angles,

bases du calcul vectoriel - Appliquer le calcul vectoriel à des problèmes de géométrie	- Equations de droites - Applications à la géométrie	longueurs, cercle, plan, sphère - Physique: travail
Analyse I - Reconnaître la signification du calcul différentiel dans les sciences de la nature, la technique et les sciences économiques - Connaître les bases du calcul différentiel	- Notion de limite, continuité - Définition de la dérivée - Pente de la tangente, taux d'accroissement - Règles du calcul des dérivées: somme et produit - Dérivées de xp (p entier)	- Sciences naturelles: divers taux de variation (vitesse, accélération, débit, etc.) - Economie: grandeurs économiques marginales, élasticité, etc.

3e année **Stochastique I**[1] - Lire les statistiques de manière critique - Etablir des statistiques simples - Connaître des outils élémentaires servant à l'analyse de phénomènes aléatoires	- Statistique descriptive - Régression linéaire, corrélation - Analyse combinatoire - Probabilité, diagrammes en arbre, calcul de probabilités	- Tous les domaines: lecture et établissement de statistiques - Biologie: lois de Mendel
Analyse II - Appliquer le calcul différentiel (cf. Analyse I) à des situations plus élaborées - Reconnaître la signification du calcul intégral dans les sciences de la nature, les techniques et les sciences économiques. - Connaître les bases du calcul intégral	- Dérivée des quotients et des fonctions composées - Dérivée des fonctions puissances (exposant rationnel), des fonctions exponentielles et logarithmiques, des fonctions trigonométriques - Etudes de fonctions à l'aide de quelques exemples. - Problèmes d'optimisation - Définition de l'intégrale, primitives - Théorème fondamental du calcul intégral - Calcul d'aire	- Cf. Analyse I - Sciences naturelles: croissance exponentielle, logistique - Géométrie: coniques - Sciences économiques, géométrie et techniques: problèmes d'optimisation - Sciences naturelles: travail, moment d'inertie, etc.
Géométrie vectorielle III - Développer des moyens mathématiques servant à représenter et appréhender l'espace - Appliquer le calcul vectoriel à des problèmes de géométrie	- Produits scalaire, vectoriel et mixte - Equations de plans - Positions relatives de droites et de plans - Problèmes de géométrie métrique	- Géométrie: distances, angles, longueurs, aires et volumes, sphère - Physique: travail, moments, force de Lorentz, etc. - Informatique: infographie, DAO

[1] En raison du travail de maturité et des travaux pratiques de physique, la statistique descriptive sera étudiée au premier semestre.

4e année		
- **Analyse III**		
- Connaître les bases du calcul intégral - Reconnaître la signification du calcul intégral dans les sciences de la nature, les techniques et les sciences économiques - Connaître les bases du calcul intégral	- Définition de l'intégrale - Primitives - Théorème fondamental du calcul intégral - Calcul d'aire - Méthodes d'intégration : intégration par parties, substitutions simples - Applications	- Cf. **Analys**e I et II - Calcul des probabilités: densités - Géométrie: volumes et surfaces de rotation, longueurs d'arcs - Physique: centre de gravité, règles de Guldin, etc.
Stochastique II		
- Poursuite de l'étude des outils élémentaires servant à l'analyse de phénomènes aléatoires - Savoir apprécier les résultats d'un test de manière correcte - Savoir faire des tests simples	- Variables aléatoires, espérance mathématique, variance - Distributions binomiale et normale	- Economie: contrôles de qualité, théorie de la décision - Biologie: génétique - Physique: théorie de la chaleur - Technique: fiabilité des systèmes - Tests élémentaires d'hypothèses
Algèbre linéaire		
- Abstraire la notion de vecteur - Dégager l'idée de structure mathématique - Connaître les bases de l'algèbre linéaire et pouvoir les appliquer	- Notion d'espace vectoriel - Bases, dimension - Applications linéaires - Calcul matriciel - Systèmes d'équations linéaires	- Nombres complexes - Sciences naturelles et économiques: applications diverses

5. Indications méthodologiques et didactiques

5.1. Considérations générales

L'enseignement des mathématiques doit offrir une formation générale de façon à être utile aux élèves qui ne rencontreront plus cette discipline dans leur formation future. Cet enseignement vise à la compréhension, à la fois, du mode de pensée propre aux mathématiques et à celle des notions et théories mathématiques. On prendra soin de présenter des applications concrètes et des exemples types. La rubrique 'Matières apparentées' peut suggérer des pistes.

Les exigences en matière d'abstraction et de rigueur sont adaptées au niveau de mathématiques choisi; elles seront plus élevées pour le niveau II.

Certains objectifs fondamentaux (connaître les principales étapes du développement historique des maths, connaître les méthodes heuristiques inductives et déductives, connaître des méthodes élémentaires de démonstration) ne doivent pas être traités à un moment précis mais le seront en temps opportun.

Sous la rubrique 'Contenus', les matières ne sont pas énumérées dans un ordre chronologique.

5.2. Moyens informatiques

Les calculs longs et fastidieux sont résolus à l'aide de la calculatrice ou de l'ordinateur. On dispose ainsi de davantage de temps pour la compréhension et les applications des mathématiques.

6. Enseignement interdisciplinaire : possibilités

Les mathématiques peuvent être considérées comme une langue formelle servant à établir des modèles dans l'étude des sciences naturelles ou dans les techniques. De plus l'emploi des mathématiques dans les sciences économiques, sociales et humaines va croissant.

Les mathématiques sont, en ce sens, un moyen bien adapté à la mise en œuvre d'un enseignement interdisciplinaire.

Compétences basales $1^{\text{ère}}$ année / Basale Kompetenzen 1.Jahr

Algèbre

Cette partie passe en revue les compétences basales liées aux ensembles, à l'arithmétique, au calcul littéral et enfin aux équations. Il est important de relever les points suivants :

- Les compétences de cette partie sont à maîtriser sans l'utilisation de la calculatrice car une bonne stratégie doit permettre d'éviter des calculs laborieux.
- Dans cette section, il a été délibérément choisi de se limiter à une seule variable (pas forcément symbolisée par x) dans la formulation des compétences liées au calcul littéral et dans leurs illustrations. Les cas faisant intervenir plusieurs variables interviennent principalement dans le traitement d'équations et sont explicités dans les compétences basales traitant ces dernières.
- La résolution d'équations avec une méthode imposée n'est pas considérée comme une compétence basale.

Compétence 1
Définir et représenter à l'aide d'un diagramme de Venn les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et y placer des nombres donnés. Définir leurs principaux sous-ensembles $\mathbb{N}^{(*)}, \mathbb{Z}^{(*)}_{(\pm)}, \mathbb{Q}^{(*)}_{(\pm)}, \mathbb{R}^{(*)}_{(\pm)}$ et utiliser la notion d'inclusion $\subset$ pour formaliser le lien entre ces ensembles.

Exemples 1.1

(a) Représenter à l'aide d'un diagramme de VENN les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et y placer des nombres suivants.

(i) -3 (ii) 0 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $-\frac{5}{2}$ (v) 7π (vi) $0.\bar{6}$

(b) Dire dans chaque cas où cela est possible quel ensemble est inclus dans quel ensemble. Ecrire la réponse en utilisant le symbole d'inclusion $\subset$.

(i) $\mathbb{R},\ \mathbb{Z}$ (ii) $\mathbb{N},\ \mathbb{Q}$ (iii) $\mathbb{Z}^*,\ \mathbb{R}$

Compétence 2
Déterminer si un nombre donné sous forme décimale ou sous forme scientifique appartient aux principaux ensembles de nombres $(\mathbb{N}^{(*)}, \mathbb{Z}^{(*)}, \mathbb{Q}^{(*)}, \mathbb{R}^{(*)}_{(\pm)})$ ou à un intervalle donné.

Exemples 2.1

(a) Qualifier de "vraie" ou de "fausse" chacune des affirmations suivantes.

(i) $-15 \in \mathbb{Z}$ (iii) $8 \in \mathbb{Z}$ (v) $\frac{178}{3} \in \mathbb{Q}^*_-$ (vii) $9 \in \mathbb{Q}_+$

(ii) $0 \notin \mathbb{R}^*$ (iv) $-15 \in \mathbb{Z}_-$ (vi) $-\frac{49}{7} \in \mathbb{Q}^*_-$ (viii) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}_+$

(b) Déterminer si les nombres suivants appartiennent à l'intervalle $I = [0.34; 0.35[$.

(i) 0.34 (ii) 0.3435 (iii) 0.35

Compétence 3
Déterminer la réunion, l'intersection et la différence (en particulier le complémentaire dans $\mathbb{R}$) de deux intervalles ou de deux principaux ensembles de nombres $(\mathbb{N}^{(*)}, \mathbb{Z}^{(*)}, \mathbb{Q}^{(*)}, \mathbb{R}^{(*)}_{(\pm)})$.

Exemples 3.1

Décrire comme un seul intervalle les ensembles suivants.

(a) $[4; 13] \cup [7; 20]$ (d) $[2; 7[\cap]1; 8]$ (g) $[4; 12[\smallsetminus[11; 13[$

(b) $[4; 13] \cap [7; 20]$ (e) $[4; 12[\cap[12; 13[$ (h) $]-\infty; 7[\cap]-3; 8]$

(c) $[2; 7[\cup]1; 8]$ (f) $[4; 12[\cup[12; +\infty[$ (i) $\mathbb{R}\smallsetminus]-6; +\infty[$

Exemples 3.2

(a) Compléter les affirmations suivantes avec le symbole d'appartenance $\in$ ou le symbole de non-appartenance $\notin$:

(i) $0 \quad \mathbb{N}^*$ (v) $0.27 \quad \mathbb{Q}$

(ii) $\frac{\pi}{3} \quad \mathbb{Q}$ (vi) $0.\overline{27} \quad \mathbb{Q}$

(iii) $-\frac{43}{4} \quad \mathbb{R}^*_+$ (vii) $\sqrt{6} \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(iv) $2 \quad \mathbb{R} \smallsetminus \{2; 4\}$ (viii) $0 \quad \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

Le nombre dont il faut tester l'appartenance est toujours écrit sont une forme "réduite". Il n'est jamais le résultat d'un calcul.

(b) Écrire les ensembles suivants sous forme (de réunion) d'intervalle(s) :

(i) $[-5;5[\setminus]-2;7[$ (ii) $[-5;5[\setminus]-2;1[$

Contre-exemples 3.3

(a) Ecrire l'ensemble $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-2\le x\le 6\}$ sous forme énumérative.

Nous considérons que la notation par caractérisation n'est pas une compétence basale.

(b) Déterminer si $0.\overline{27}$ appartient à l'intervalle $[\frac{23}{88};\frac{7}{22}[$.

L'élève doit savoir que $0.\overline{27}$ est un nombre rationnel mais l'algorithme permettant de transformer un code à virgule périodique en fraction n'est pas considéré comme une compétence basale. De plus, l'évaluation des fractions sans calculatrice n'est pas considéré comme une compétence basale.

Compétence 4
Additionner, soustraire, multiplier, diviser, élever à une puissance à exposant naturel et extraire la racine dans un calcul contenant jusqu'à 8 entiers et de sorte que toutes les étapes du calcul aient un résultat entier ne dépassant pas 100 en valeur absolue.

Derrière la compétence 4 se cache implicitement la maîtrise du calcul mental et des priorités des opérations.

Exemples 4.1

(a) Supprimer les parenthèses inutiles dans le calcul suivant sans l'effectuer :

$$(-2)^2-(4\cdot 3^2)-(5+4)+4\cdot(-3)-(7:4)\cdot 2$$

(b) Effectuer $\sqrt{6^2+8^2}-15\cdot 6-1^2+12:2\cdot 3$.

Solution

$\sqrt{6^2+8^2}-15\cdot 6-1^2+12:2\cdot 3=\sqrt{100}-90-1+6\cdot 3=10-90-1+18=-81+18=-63$

Contre-exemple 4.2

Réécrire $\sqrt{20}$ en extrayant les éventuels carrés parfaits.

Compétence 5
Simplifier une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers à au plus deux chiffres.

Exemples 5.1

Simplifier les fractions suivantes le plus possible.

(a) $\frac{24}{18}$ (b) $-\frac{72}{56}$

Contre-exemples 5.2

Simplifier les fractions suivantes le plus possible.

(a) $\frac{187}{154}$ (b) $\frac{6}{846}$

Compétence 6
Additionner, soustraire, multiplier et diviser deux ou trois fractions dont les numérateurs sont des entiers à deux chiffres et les dénominateurs à un chiffre.

Exemples 6.1
Effectuer puis simplifier sans calculatrice.

(a) $\frac{5}{2}+\frac{7}{3}$ (b) $\frac{2}{3}-\frac{5}{2}$ (c) $\frac{21}{4}\cdot\frac{3}{7}$ (d) $\frac{\frac{15}{4}}{\frac{1}{3}}$ (e) $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{3}$ (f) $\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$

Contre-exemples 6.2
Effectuer puis simplifier sans calculatrice.

(a) $\frac{121}{7}+\frac{11}{42}$ (b) $\frac{7}{4}+\frac{1}{6}-2+\frac{6}{5}$

Compétence 7
Passer de la notation fractionnaire ou avec radicaux aux exposants négatifs/rationnels et vice versa.

Exemples 7.1

(a) Écrire les expressions suivantes à l'aide de radicaux et de puissances entières positives.

(i) x^{-3} (ii) $2^{\frac{1}{2}}$ (iii) $x^{\frac{5}{6}}$ (iv) $5^{-\frac{1}{4}}$ (v) $x^{-\frac{4}{3}}$ (vi) $-x^{\frac{3}{2}}$

(b) Écrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels.

(i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt[3]{a^5}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{23}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ (v) $-\frac{1}{\sqrt[7]{x^8}}$

Exemples 7.2
Calculer les expressions suivantes sans calculatrice (résultats sans code en virgule, sans puissance et simplifiés au maximum) :

(a) -2^0 (c) $32^{\frac{2}{5}}$ (e) $-27^{\frac{1}{3}}$ (g) $-9^{-\frac{3}{2}}$

(b) $(-3)^{-4}$ (d) $16^{-\frac{3}{4}}$ (f) 0^3 (h) $-4^{\frac{1}{2}}$

Compétence 8
Utiliser les règles (au plus trois) des puissances pour simplifier une expression à exposants entiers.

Exemples 8.1
Simplifier le plus possible (la réponse ne contiendra plus que des puissances entières positives).

(a) x^4x^{28} (b) $\frac{x^8}{x^5}$ (c) $\frac{x^5}{x^9}$ (d) $(-x^6)^2$ (e) $-(x^6)^2$ (f) $(a^8a^2)^3$

Contre-exemples 8.2
Simplifier le plus possible (la réponse ne contiendra plus que des puissances entières positives et éventuellement des radicaux).

(a) $x^2\cdot\sqrt[3]{x}$ (b) $\frac{\sqrt{x^3}}{x^2}$ (c) $\sqrt{\sqrt[4]{x^{16}}}$

Compétence 9
Développer et réduire une expression polynomiale (à au plus trois termes) contenant au maximum un produit (produits remarquables du second degré inclus) à coefficients entiers.

Exemples 9.1
Développer et réduire.

(a) $(-6x+4)^2$
(b) $(-3x-5)^2$
(c) $x^3(x+1)$
(d) $(5\heartsuit-1)(\heartsuit^2+2\heartsuit)$
(e) $9x^4-(3x^2+4)^2$
(f) $(x^4-2)(x^4+2)$

Contre-exemples 9.2
Développer et réduire.

(a) $x^3(x+1)(x^5-5x)$
(b) $(3x^2+4)^3$
(c) $(x^2-3x+1)(x-2)(x^2-x-5)$
La maîtrise de la multiplication de trois polynômes n'est pas considérée comme une compétence basale.

Compétence 10
Factoriser une expression polynomiale à coefficients entiers à l'aide d'une mise en évidence d'un monôme ou d'un binôme ou à l'aide d'un produit remarquable du second degré.

La factorisation d'un trinôme du second degré n'est pas considérée comme une compétence basale.

Exemples 10.1
Factoriser les expressions suivantes le plus possible.

(a) $15x^3+10x$
(b) $3x(x+1)+5(x+1)$
(c) $(x-2)(x+8)+(x-2)(x-5)$
(d) $a^2+8a+16$
(e) $16y^2-9$
(f) $36x^2-84x+49$

Contre-exemples 10.2
Factoriser les expressions suivantes le plus possible.

(a) x^2-x-12
(b) $2x^2-8x-10$
(c) $(2x-5)(4x-7)-3(5-2x)$
(d) $x^5-x^3+x^2-1$
(e) x^4-4
(f) x^3-16x^2+64x

Compétence 11
Simplifier une expression littérale rationnelle à coefficients entiers et une variable à l'aide des compétences 8 et 10.

Exemples 11.1
Simplifier les fractions suivantes le plus possible.

(a) $\frac{x^2+x}{x}$

(b) $\frac{8x^3+6x^2}{4x^2+4x}$

(c) $\frac{4(x+1)^2}{3(x^2-1)}$

(d) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

Contre-exemples 11.2
Simplifier les fractions suivantes le plus possible après avoir factorisé le numérateur et le dénominateur.

(a) $\frac{4x^2-x-14}{x-2}$

(b) $\frac{3x^2+x-2}{6x^2-3x-9}$

(c) $\frac{(x-5)^2-x+5}{10-2x}$

(d) $\frac{x^3-27}{-2x^2-6x-18}$

Compétence 12
Additionner, soustraire, multiplier et diviser deux expressions littérales rationnelles à coefficients entiers à l'aide des compétences 8, 10 et 11.

Exemples 12.1
Effectuer et exprimer le résultat sous la forme d'une seule fraction simplifiée au maximum.

(a) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}$

(b) $\frac{2}{x}-\frac{x}{2}$

(c) $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+3}$

(d) $\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+1}{x}$

(e) $\frac{4x}{x-3}+\frac{2x-1}{2x-6}$

(f) $\frac{3}{x-3}-\frac{6}{3-x}$

(g) $\frac{4}{x}+\frac{1-10x^2}{2x^3}$

(h) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x^2+8}{x^2-4}$

(i) $\frac{x+2}{x-1}+\frac{3}{x^2+6x-7}$

Contre-exemples 12.2
Effectuer et exprimer le résultat sous la forme d'une seule fraction simplifiée au maximum.

(a) $\frac{x}{x+3}+\frac{4x}{x-3}+\frac{6x}{x^2-9}$

(b) $\frac{2-x}{x^2-x-6}+\frac{x+1}{x^2+6x+8}$

(c) $2x\sqrt{2x+1}+\frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}$

Compétence 13
Résoudre une équation polynomiale du premier degré, avec ou sans paramètres, à coefficients entiers et dont les membres gauches et droits peuvent être simplifiés selon les critères de la compétence 9.

Exemples 13.1

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

(i) $3x-4=-2x+1$ (ii) $4x+1=4(x+1)-3$ (iii) $3(x+2)=3x-5$

Solution

(i) $S=\{1\}$ (ii) $S=\mathbb{R}$ (iii) $S=\emptyset$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2a-b=6a+c$ par rapport à

(i) c (ii) b (iii) a

Compétence 14
Résoudre une équation polynomiale du second degré, sans paramètre, à coefficients entiers et dont les membres gauches et droits peuvent être simplifiés selon les critères de la compétence 9.

Exemples 14.1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

(a) $8x^2 + 6x - 9 = 0$ (b) $49x^2 + 1 = 14x$ (c) $4x^2 + x = x^2 + 3x - 2$

Solution

(a) $S = \{-\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\}$ (b) $S = \{\frac{1}{7}\}$ (c) $S = \emptyset$

Compétence 15
Résoudre une équation polynomiale à coefficients entiers comprenant un seul monôme.

Exemples 15.1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

(a) $x^3 = 125$ (b) $x^6 = 64$ (c) $x^3 + 64 = 0$ (d) $x^6 + 100 = 0$

Compétence 16
Résoudre une équation rationnelle à coefficients entiers (et dont les membres gauches et droits peuvent être simplifiés selon les critères de la compétence 9) se ramenant à une équation polynomiale de premier ou du second degré sans recours à une substitution.

La résolution d'équations nécessitant un trop grand travail de réduction pour aboutir à une équation polynomiale de premier ou du second degré et/ou une substitution n'est pas considéré comme une compétence basale.

Exemple 16.1
Résoudre $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$.

Solution
L'ensemble de définition de l'équation est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \smallsetminus \{-2; 2\}$. Dans $\mathcal{D}$, nous avons les équations équivalentes suivantes :

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} \Longleftrightarrow \frac{4}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} \Longleftrightarrow 4 = x + 2 \Longleftrightarrow 2 = x.$$

Comme $2 \notin \mathcal{D}$, l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Exemples 16.2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

(a) $\frac{x+1}{x} - 2 = \frac{x-1}{x}$ (b) $\frac{12x-8}{x-4} - \frac{8}{x-2} = 6$

Contre-exemples 16.3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

(a) $\frac{5}{x^2-2x} + \frac{6}{x^2-3x} = \frac{3}{x}$ (b) $\frac{2x^4-(x-2)(x+2)}{x^2} = \frac{8}{x^2} - 3$

Compétence 17
Résoudre un système régulier de deux équations linéaires.

Contre-exemple 17.1
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 6 \\ 2x+y+3z & = & 14 \\ x+y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

Kompetenz 18
Lösen Terme, welche verschiedene Variablen enthalten, nach den Variablen auf, welche nur einmal auftauchen und welche freigestellt werden können, ohne dass sie ausgeklammert werden müssen.

Beispielen 18.1
Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der angegebenen Variablen auf :

(a) $v = at + v_0$ nach t auflösen

(b) $g = G \cdot \dfrac{m}{(R+z)^2}$ nach m auflösen

(c) $g = G \cdot \dfrac{m}{(R+z)^2}$ nach z auflösen

(d) $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgh$ nach h auflösen

(e) $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgh$ nach v auflösen

(f) $\dfrac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1} = \gamma V_1$ nach V_2 auflösen

(g) $\dfrac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1} = \gamma V_1$ nach T_1 auflösen

(h) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ nach f auflösen

Ici la solution $f = \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ est admise.

(i) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ nach p auflösen

Gegenbeispiel 18.2
Lösen Terme, welche verschiedene Variablen enthalten, auch nach den Variablen auf, welche mehrmals auftauchen, welche jedoch mit Ausklammern freigestellt werden können :

(a) $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgh$ nach m auflösen

(b) $\dfrac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1} = \gamma V_1$ nach V_1 auflösen

Géométrie

Cette partie passe en revue les compétences basales liées à la géométrie classique, la trigonométrie élémentaire et enfin à la notion de vecteur. Sans surprise, la différence d'approches sur les dimensions en géométrie entre sections linguistiques persiste (les alémaniques traitants simultanément les dimensions 2 et 3 alors que les romands se limitent à la dimension 2). Il a été choisi de respecter cette différence et de ne surtout pas imposer une uniformisation. Les différences majeures à relever sont les suivantes :

- La compétence suivante, découlant de la différence de sensibilités évoquée ci-dessus, ne concerne que les alémaniques.

  Kompetenz 19
  Berechnen der Oberfläche und des Volumen von Kugeln, geraden und spitzen Körpern.

- Les francophones se restreindront aux vecteurs du plan alors que les germanophones traiteront les vecteurs du plan et de l'espace.
- Les francophones notent la base orthonormée standard du plan $(\vec{i};\vec{j})$ alors que les germanophones la notent $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

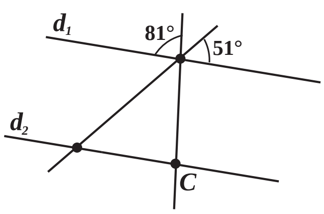
On note finalement qu'au vu de leurs caractères évidents, certaines compétences ne sont pas illustrées.

Compétence 20
Calculer l'aire et le périmètre d'une figure composée de triangles, quadrilatères standard et/ou d'un disque.

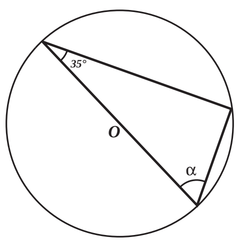
Compétence 21
Calculer les angles d'une figure plane en recourant aux propriétés des angles dits "alternes-internes", "opposés", "alternes-externes" ainsi qu'à la propriété de la somme des angles d'un triangle ou d'un quadrilatère et celle du demi-cercle de Thalès.

Exemple 21.1
Déterminer les angles α, β et γ des triangles ABC suivants sachant que $d_1 \,//\, d_2$:

(a)



(b)



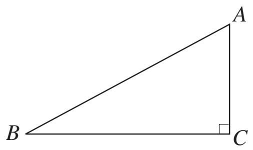
Compétence 22
Enoncer et appliquer les différentes égalités entre les rapports des côtés de deux triangles semblables.

Compétence 23
Enoncer et appliquer le théorème de Pythagore.

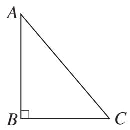
Compétence 24
Enoncer et appliquer les rapports trigonométriques.

Exemples 24.1
Pour chacun des triangles ABC ci-dessous, préciser quel côté est l'hypoténuse, écrire les formules du théorème de Pythagore et de l'aire puis exprimer $\sin(\beta)$, $\cos(\beta)$ et $\tan(\beta)$ en fonction des côtés a, b et c.

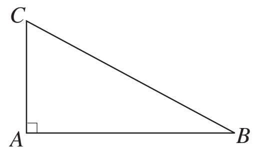
(a)



(b)



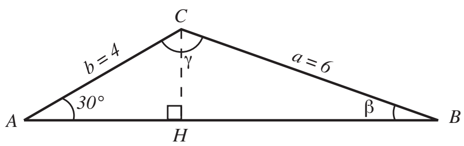
(c)



Compétence 25
Résoudre un triangle rectangle dont sont donnés un côté et un angle non droit ou un autre côté. Résoudre un problème conduisant *directement* à cette situation.

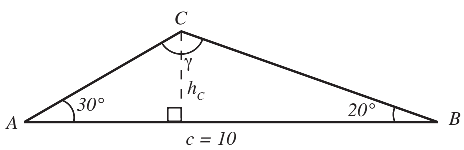
Exemple 25.1
Quelle est la hauteur d'un poteau vertical dont l'ombre sur un terrain horizontal mesure 4 mètres lorsque le soleil fait un angle de 43° avec l'horizontale ?
La traduction du texte en schéma est considérée comme une compétence basale car un triangle rectangle apparaît immédiatement.

Exemple 25.2
A partir des informations données dans la figure ci-dessous, résoudre le triangle ABC :



Le fait de donner la décomposition du triangle ABC en deux triangles rectangles rend la capacité à résoudre ce problème assimilable à une compétence basale.

Contre-exemple 25.3
A partir des informations données dans la figure ci-dessous, résoudre le triangle ABC :



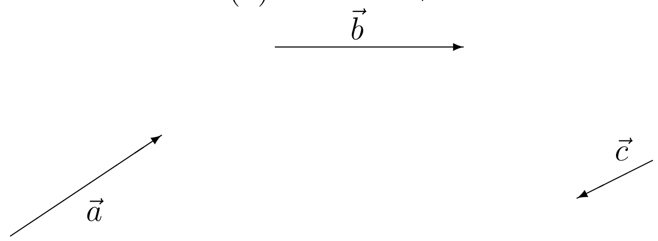
L'exclusion du champ des compétences basales du problème réside dans la pose et la résolution du système de deux équations à deux inconnues basé sur $\tan(30°)$ *et* $\tan(20°)$.

Compétence 26
Enoncer une définition de la notion de vecteur.

Compétence 27
Construire la somme, la différence et le multiple rationnel simple d'au maximum trois vecteurs.

Exemples 27.1
Construire à la règle graduée et au compas les vecteurs suivants.

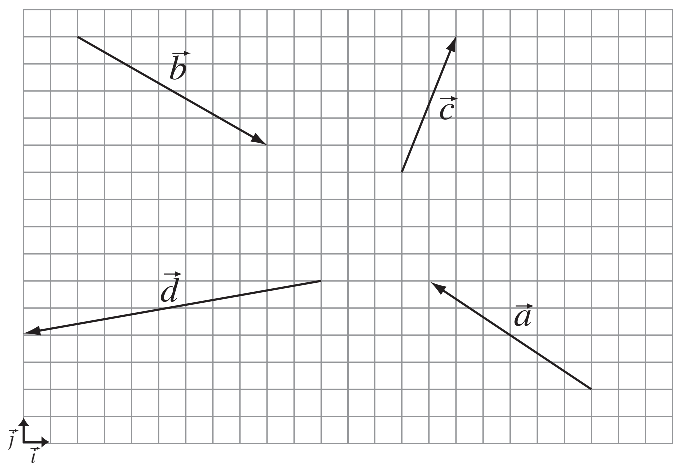
(a) $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$ (b) $\vec{e} = 0.5\,\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$



La mesure des vecteurs pour leur construction est admise.

Compétence 28
Associer à un vecteur ses composantes algébriques par rapport à la base orthonormée canonique et inversement. Définir et calculer la norme (longueur) d'un vecteur donné par ses composantes algébriques par rapport à cette base.

Exemple 28.1
Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont donnés dans la base orthonormée ci-dessous. Déterminer géométriquement les composantes algébriques de ces quatre vecteurs puis calculer leur norme.



Compétence 29
Calculer les composantes d'un vecteur à partir de sa longueur et de sa direction.

Exemple 29.1

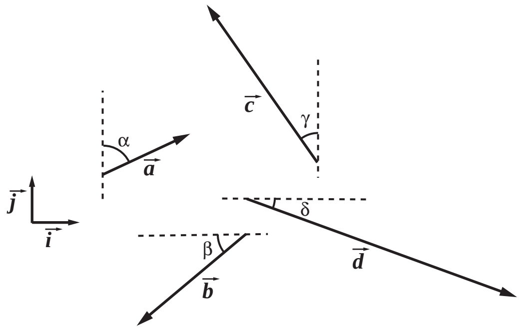
Calculer les composantes algébriques des vecteurs suivants à l'aide du croquis ci-contre et des indications données :

(a) $\|\vec{a}\| = 2$ et $\alpha = 65°$

(b) $\|\vec{b}\| = 3$ et $\beta = 40°$

(c) $\|\vec{c}\| = 4$ et $\gamma = 55°$

(d) $\|\vec{d}\| = 6$ et $\delta = 20°$



Apparaissant fréquemment en physique, ce type de problème est considéré comme basal.

Compétence 30
Calculer la somme, la différence, le multiple d'au maximum trois vecteurs.

Exemple 30.1

Considérons les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ du plan exprimés dans la base orthonormée $(\vec{i};\vec{j})$. Calculer les composantes algébriques des vecteurs suivants :

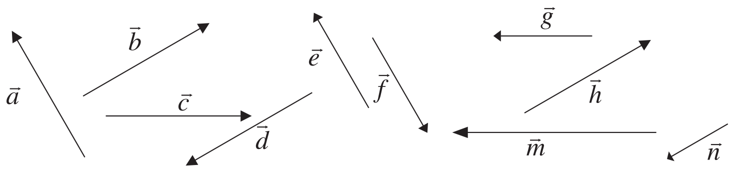
(a) $\vec{f} = \vec{a} + 3(-2\vec{b} + \vec{j})$ (b) $\vec{g} = -(\vec{f} + 4\vec{a}) - \vec{i}$ (c) $\vec{h} = 2\vec{i} - 3(-\frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{a})$

Les élèves doivent connaître les composantes de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$. De plus, les alémaniques utiliserons ici une formulation de l'énoncé plus synthétique.

Compétence 31
Comparer (graphiquement et formellement) deux vecteurs pour déterminer s'ils sont égaux, opposés ou colinéaires.

Exemples 31.1

(a) On considère les vecteurs suivants.



(i) Déterminer la norme (longueur) de chacun de ces vecteurs si une unité équivaut à un centimètre.

(ii) Déterminer quels vecteurs sont

- égaux
- opposés
- colinéaires

(b) Dans chaque cas, déterminer si les deux vecteurs proposés (par rapport la base orthonormée canonique) sont colinéaires. Si oui, donner le coefficient de colinéarité.

(i) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ (ii) $\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{g} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{21}{5} \end{pmatrix}$

Compétence 32
Utiliser correctement la notion de repère orthonormé du plan (Kartesisches Koordinatensystem). Déterminer les composantes algébriques du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des coordonnées des points A et B et déterminer un des deux points si l'autre et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont connus.

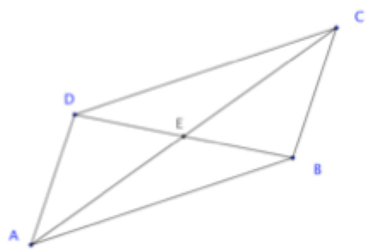
Exemple 32.1
Considérons les points $A(3;-8)$, $B(-1;-2)$ et $C(0;9)$ du plan muni d'un repère orthonormé $(O;(\vec{i};\vec{j}))$ ainsi que les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer les composantes algébriques des vecteurs suivants et leur norme (longueur) :
(i) $\overrightarrow{AB}$ (ii) $\overrightarrow{BA}$ (iii) $\overrightarrow{BC}$

(b) Calculer les coordonnées des points F, G et H tels que
(i) $\vec{a} = \overrightarrow{AF}$ (ii) $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$ (iii) $\vec{o} = \overrightarrow{HC}$

Beispiel 32.2
Im folgenden ist ein Parallellogramm gezeichnet. Wir gehen davon aus, dass die Eckpunkte A und B und der Diagonalenschnittpunkt E bekannt sind.



(a) Geben Sie mindestens eine Möglichkeit an, wie der Ortsvektor $\overrightarrow{OD}$ berechnet werden könnte.

(b) Der Ortsvektor $\overrightarrow{OG}$ wird wie folgt berechnet : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. Zeichnen Sie den Punkt G in der Skizze ein.

Fonctions

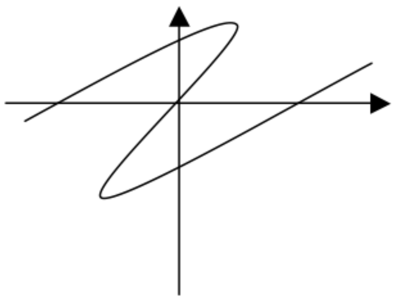
Cette partie passe en revue les compétences basales liées au concept de fonction numérique et aux polynômes de degré inférieur à trois. On note qu'au vu de leurs caractères évidents, certaines compétences ne sont pas illustrées.

Compétence 33
Énoncer une définition d'une fonction.

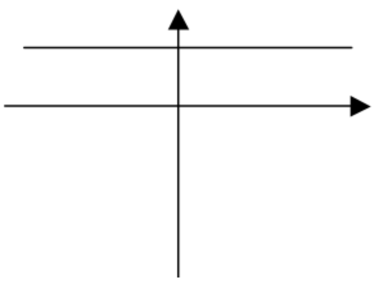
Compétence 34
Déterminer si une courbe du plan est le graphe d'une fonction réelle.

Exemple 34.1

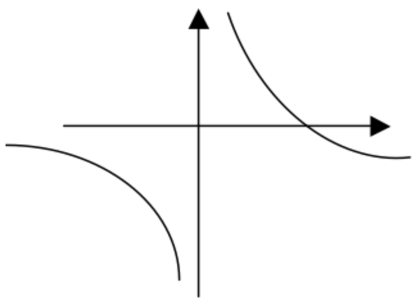
a)



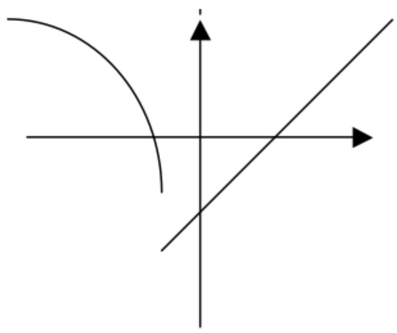
b)



c)



d)



Compétence 35
À l'aide du graphe d'une fonction, déterminer les éléments suivants :

(a) le domaine de définition

(b) l'ensemble des valeurs

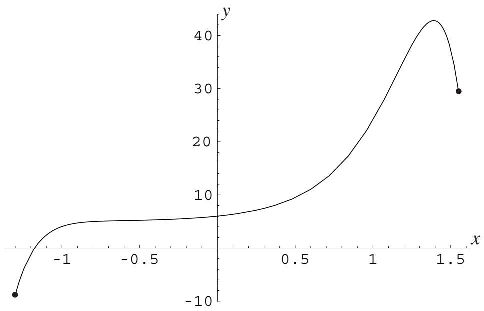
(c) l'ensemble des zéros

(d) l'image d'un élément du domaine de définition

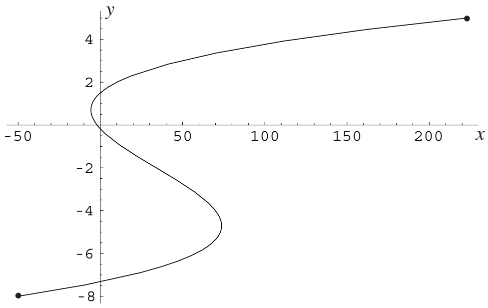
(e) la (les) préimages d'un élément de l'ensemble d'arrivée

Exemple 35.1
Déterminer si chacune des courbes suivantes représente une fonction. Dans l'affirmative, déterminer à l'aide du graphe le domaine de définition, l'ensemble des valeurs, l'ensemble des zéros, l'image de 1 et la(les) préimage(s) de 40.

(1)



(2)



Compétence 36
Esquisser point par point (y compris le point d'intersection avec l'axe des ordonnées) le graphe d'une fonction d'expression et de domaine de définition donnés.

Exemple 36.1
Représenter le graphe de la fonction f définie par $\begin{array}{rccc} f: & [-4;8] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$

Compétence 37
Déterminer si un point appartient au graphe d'une fonction dont l'expression et le domaine de définition sont donnés.

Kompetenz 38
Erkennen lineare (affine) und quadratische Funktionen an der Funktionsgleichung und am Graphen.

Beispiel 38.1
Welche der folgenden Funktionen sind linear (affine) oder quadratisch ?

(a) $f(x) = 2x - 5$

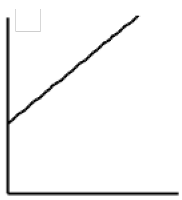
(b) $f(x) = 2^x - 3$

(c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$

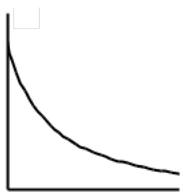
(d) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$

(e) $f(x) = x^3 - x$

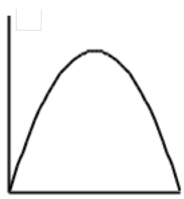
(f) $f(x) = 4x - 2$



(g)



(h)



(i)

Compétence 39
Déterminer à l'aide de l'expression d'une fonction polynomiale de degré inférieur à 3 les éléments suivants :

(a) le domaine de définition
(b) l'ensemble des valeurs
(c) l'ensemble des zéros
(d) l'image d'un élément du domaine de définition
(e) la (les) préimages d'un élément de l'ensemble d'arrivée
(f) l'extremum (s'il existe)
(g) le graphe

Exemples 39.1

(a) Soit g la fonction d'équation $y = g(x) = -2x + 3$ pour $x \in [-4; 7]$
  (i) Déterminer l'ensemble des valeurs et l'ensemble des zéros de g.
  (ii) Calculer l'image de 1.
  (iii) Calculer la(les) préimages de 5.
  (iv) Calculer la(les) préimages de 23.
  (v) Esquisser le graphe de g.

(b) On considère la parabole d'équation $f(x) = x^2 - 2x - 3$
  (i) Déterminer l'ensemble des valeurs et l'ensemble des zéros de f.
  (ii) Calculer l'image de 1.
  (iii) Calculer la(les) préimages de 5.
  (iv) Déterminer les éventuels points d'intersection avec le système d'axes et le sommet de la parabole.
  (v) Esquisser le graphe de f.

Compétence 40
Déterminer à l'aide du graphe d'un polynôme de degré inférieur à 3 le signe du coefficient principal et du coefficient constant.

Beispiel 40.1
Kreuzen Sie jeweils den richtigen Funktionstyp an und bestimmen Sie, ob die Koeffizienten positiv, negativ oder null sind.

(a)

☐ $f(x) = mx + h$

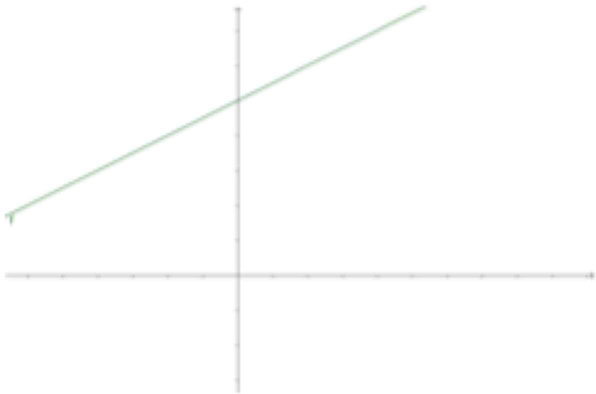
$m \dots 0$

$h \dots 0$

☐ $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a \dots 0$

$c \dots 0$



(b) ☐ $f(x) = mx + h$

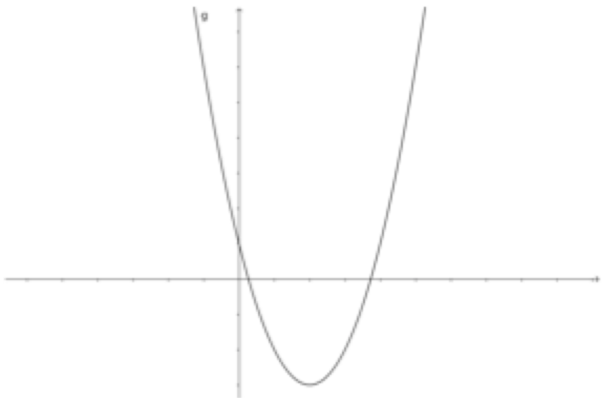
$m \dots 0$

$h \dots 0$

☐ $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a \dots 0$

$c \dots 0$



Contre-exemple 40.2
Déterminer le signe de b dans le cadre de l'exercice 40.1.

Compétence 41
Retrouver l'expression algébrique d'une fonction affine à partir de caractéristiques de son graphe.

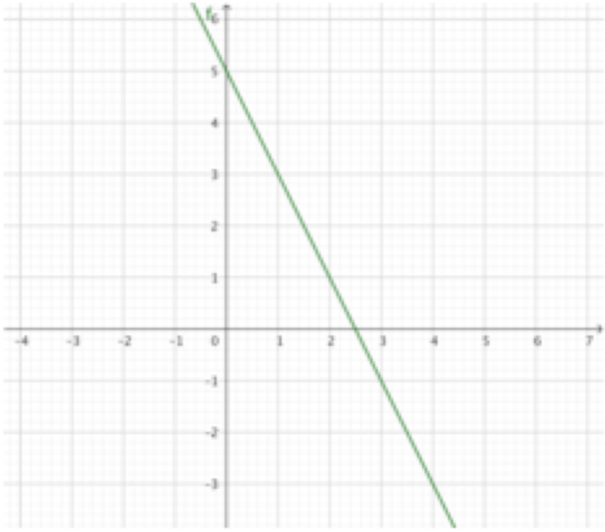
Exemple 41.1
Déterminer l'équation de la fonction affine f telle que

(a) $f(0) = -1$ et la pente du graphe de f vaut $\frac{3}{2}$.

(b) $f(4) = 5$ et la pente du graphe de f vaut 0.

(c) son graphe passe par $A(1; 2)$ et $B(1; -7)$.

(d) le graphe de f se présente comme suit



Compétence 42
Déterminer graphiquement et formellement les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de deux fonctions polynomiales de degré inférieur à 3.

Exemples 42.1
Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre les graphes de f et g si $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2 + 2x - 4$

(a) A l'aide des graphes de f et g.

(b) Par calculs.

Compétence 43
Résoudre une inéquation du premier degré d'une manière formelle et d'une manière graphique.

Exemples 43.1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5x - 7 \geqslant 11x + 9$

(a) d'une manière graphique,

(b) par calculs.